

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA
“TOR VERGATA”

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria dei Modelli e dei Sistemi

Tesi di Laurea Triennale

Equazioni di Hamilton-Jacobi ed applicazioni

Laureando
Davide Gagliardi

Relatore
Prof. Giovanni Bellettini

Anno Accademico 2007-2008

Indice

Introduzione	iii
1 Equazioni alle derivate parziali (PDE)	1
1.1 Definizione di PDE standard con dato al bordo	1
1.2 Trasformazione di PDE in ODE	2
1.3 Equazioni di compatibilità	4
1.4 Soluzioni locali	6
1.5 Prime conclusioni	11
2 Le Equazioni di Hamilton-Jacobi	13
2.1 ODE di Hamilton	14
2.1.1 Hamiltoniana indipendente dalla posizione	15
2.2 Soluzione di un problema di calcolo delle variazioni	20
2.3 Mappa gradiente e la Trasformata di Legendre	24
2.3.1 Trasformata di Legendre	25
2.4 Dualismo	30
2.5 Secondo problema di calcolo delle variazioni	32
2.6 Lax-soluzione delle equazioni di Hamilton-Jacobi	39
2.7 Soluzioni lipschitziane semiconcave	42

3	Soluzioni di viscosità	53
3.1	Viscosità evanescente	53
3.2	Consistenza	57
3.3	Soluzione viscosa di tipo Lax per problema H-J a tempo finito	62
3.4	Conclusioni	65
4	Applicazioni	67
4.1	Distanza euclidea da un insieme, ed equazione eiconale .	68
4.1.1	Equazione eiconale monodimensionale	68
4.2	Problema di tempo minimo , generalizzazione dell' eiconale	69
4.3	Trasformazioni canoniche	76
4.3.1	Una formulazione del principio di Hamilton.	78
4.3.2	Struttura delle trasformazioni canoniche complete . . .	80
4.3.3	Funzioni generatrici	82
4.3.4	L'equazione di Hamilton-Jacobi	86

Ai miei cari.

Ringraziamenti

Ringrazio tutti coloro che mi hanno incoraggiato e sostenuto, in particolare il Professor Bellettini per la pazienza e grande disponibilit  con cui ha seguito questo lavoro di tesi.

Introduzione

Le equazioni di Hamilton-Jacobi (H-J) hanno trovato successo in letteratura soprattutto nell'ambito della *fisica teorica* e della *teoria del controllo*. Nel primo caso, in *dinamica* contribuiscono alla definizione delle trasformazioni canoniche mediante l'ausilio di funzioni generatrici, in *meccanica dei continui* consentono di caratterizzare leggi di conservazione come massa, momento, energia; in *ottica* permettono la descrizione di fronti d'onda. Nel secondo caso, per equivalenza con formulazioni variazionali coinvolgenti Lagrangiane, le equazioni H-J costituiscono il substrato su cui si fonda la teoria del *controllo ottimo* e molti dei problemi ad essa relativi. La formulazione a cui ci siamo dedicati nel corso della tesi è la seguente :

$$\begin{cases} u_t + H(Du, x) = 0 & \text{per } (x, t) \in U := \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \\ u = g & \text{per } (x, t) \in \Gamma := \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} . \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Dove la funzione H denominata *Hamiltoniana* è in generale una funzione non lineare delle variabili spaziali (x) e della parte del gradiente relativa ad esse, e g è il dato sul bordo Γ del dominio U . L'obiettivo principale di questa tesi è stato la ricerca delle condizioni minime sulle funzioni H e g che appaiono nelle equazioni di Hamilton-Jacobi affinché esista un qualche tipo di soluzione, ed in taluni casi si è discussa l'unicità e la forma di soluzioni particolari. Il modo in cui tale studio è stato riportato in questa tesi rispecchia quello che si è seguito nella pratica. In particolare partendo da approcci classici,

con vari gradi di complicazione sono state discusse formulazioni sempre più sofisticate.

Il primo approccio è stato quello di inquadrare le equazioni in esame nell'ambito della teoria più generale delle equazioni alle derivate parziali (PDE), di cui si è discusso il criterio di esistenza e unicità locale per via della procedura di trasformazione in sistemi di equazioni ordinarie (ODE) denominate *caratteristiche*.

Sono stati evidenziati i limiti dell'approccio stesso mostrando che non sempre, o comunque non globalmente, soluzioni di ODE possano rispecchiare soluzioni di PDE da cui sono stati generati.

Tuttavia tale approccio è stato necessario per mostrare come si possa trasformare le equazioni di Hamilton-Jacobi in forma PDE nelle ben note *equazioni di Hamilton* (ODE).

Il secondo approccio è stato quello di ricondurre il problema ODE di Hamilton ad una forma base di un problema di calcolo delle variazioni (coinvolgente la definizione di una prima Lagrangiana). Si è riconosciuto che, poste opportune definizioni di *momento generalizzato* e di *Hamiltoniana* ed ipotesi di invertibilità sulla prima e di regolarità sulla seconda, allora una soluzione del problema di calcolo delle variazioni soddisfa anche il sistema delle *equazioni di Hamilton* (ODE).

Procedendo su questa linea, attraversando varie definizioni, si è pervenuti a quella definitiva di un operatore: la *trasformata di Legendre* che permette di legare indissolubilmente la Lagrangiane e l'Hamiltoniane, se *convesse* e *superlineari*, come l'una la trasformata dell'altra.

Beneficiando di quanto appreso dalla formulazione variazionale, quest'ultima è stata particolarizzata nel senso della ricerca delle *geodetiche*, al fine di ottenere, come funzionale ottimo una funzione u dipendente dalle variabili (x, t)

della soluzione del problema PDE .

Il passo successivo è stato quello di scoprire che tale funzione $u(x, t)$ coincide con la 'ben nota' formula di Hopf-Lax e, di quest' ultima sono state ottenute due formulazioni equivalenti: la prima che vincoli la soluzione ad un dato sul bordo ($g(y)$ scelto per semplicità continuo), la seconda al valore della funzione in un qualsiasi altro punto del dominio $u(y, s)$ rivelando una struttura ricorsiva della soluzione.

Questa seconda formulazione della formula di Hopf-Lax è stata fondamentale per la ricerca di condizioni sufficienti per la regolarità della soluzione globale, in quanto consente di dimostrare che se la funzione al bordo è lipschitziana rispetto a n variabili, allora anche la soluzione $u(x, t)$ lo sarà su tutto il suo dominio di dimensione $n + 1$.

Quest' ultima informazione insieme al teorema di Rademacher è servita ad affermare che la soluzione di Hopf-Lax è differenziabile quasi ovunque se costruita a partire da un dato lipschitziano.

Infine, con un teorema, è stata mostrata la consistenza della soluzione di Hopf-Lax *differenziabile in un punto* con l'equazione di Hamilton-Jacobi *in tale punto*, e beneficiando delle osservazioni precedenti si è concluso che una soluzione di Hopf Lax costruita a partire da un dato lipshitziano è differenziabile quasi ovunque ed ivi risolve l'equazione di Hamilton-Jacobi. Dunque si è riuscito a garantire l'esistenza di una soluzione classica valida quasi ovunque solo sotto ipotesi di Lipschitzianità della funzione g e di convessità e superlinearità della funzione H . A conclusione di questa parte di studio si è osservato con un controesempio che le condizioni di *Lipschitzianità* del dato g e di *convessità e superlinearità* della funzione Lagrangiana non sono sufficienti per l'unicità della Lax-soluzione delle equazioni di Hamilton-Jacobi. Si è presentata dunque la necessità di operare una restrizione degli insiemi

di definizione delle funzioni H , g al fine di selezionare un unico tipo di soluzione u del problema (I.1) in cui H dipende solo dal gradiente di u . Si è scelto di selezionare all'interno dell'insieme delle funzioni lipschitziane nelle variabili (x, t) il sottoinsieme delle funzioni *semiconcave* nella variabile x e si è visto che è possibile ottenere un'unica soluzione di questo tipo (quasi ovunque) aggiungendo alle ipotesi precedenti, quella di semiconcavità sulla funzione g o di uniforme convessità sulla funzione H . Accade inoltre che nel primo caso la funzione u otterrà una costante di semiconcavità pari a quella di g , mentre nel secondo caso la costante (in x) sarà proporzionale a $\frac{1}{\theta t}$ con θ costante di uniforme continuità di H e quindi per $t \rightarrow \infty$ la sezione trasversale a t della funzione $u(x, t)$ tenderà ad essere concava. Poi ci si è occupati del problema (I.1) in cui H dipende anche dalla posizione x . Si è formulato questo problema nel *senso della viscosità* ossia definendo un nuovo problema che tendesse ad esso quando degenera un fattore additivo di diffusione, e che avesse una soluzione convergente ad una soluzione del problema iniziale. Si è definita poi una *soluzione viscosa* che nel nostro caso è una funzione u *uniformemente continua limitata* e soddisfacente una serie di disequazioni (condizioni di sotto/sopra soluzioni di viscosità). Si è mostrato poi che una soluzione viscosa differenziabile in un punto risolve in quel punto il problema (I.1). Si è poi ristretto il dominio del problema da orizzonte infinito $t \in [0, \infty)$ a finito $[0, T]$ mostrando l'esistenza di un'unica soluzione sotto ipotesi $|H(p, x) - H(p, \tilde{x})| \leq |x - \tilde{x}|(1 + |p|)$ rispetto alla variabile x . Infine si è mostrato che per un problema ad orizzonte finito in cui H non dipenda da x , sia convessa e superlineare ed il dato iniziale g sia limitato e lipschitziano allora la formula di Hopf-Lax è soluzione non solo in *senso debole* ma anche *soluzione viscosa*. L'ultima parte di questa tesi è stata dedicata alle applicazioni. La prima ad essere citata è stata l'equazione eiconale, che si presenta

al centro di classici problemi di ottica, che ha come soluzione la funzione distanza da un insieme. La seconda è stata l'interpretazione della soluzione del problema di tempo minimo come soluzione di una forma più generale di equazione eiconale. Infine si è deciso di introdurre il problema fisico della ricerca delle trasformazioni canoniche, attraverso utilizzo di funzioni generatrici e si è mostrato che in taluni casi tali funzioni coincidono con le soluzioni di equazioni di Hamilton-Jacobi.

Capitolo 1

Equazioni alle derivate parziali (PDE)

1.1 Definizione di PDE standard con dato al bordo

Quando si parla di equazioni alle derivate parziali ci si può riferire a diverse notazioni. Quella adottata da noi in questa tesi è la seguente: sia U aperto di \mathbb{R}^n , $\Gamma \subseteq \partial U$, $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$. Si vuole trovare, se esiste, la soluzione $u : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$, tale che:

$$\begin{cases} F(Du, u, x) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \bar{U} \\ u = g & \text{su } \Gamma. \end{cases} \quad (1.1)$$

Per il corso di questa tesi non sarà necessario supporre sulle funzioni F e g regolarità superiore a C^2 .

1.2 Trasformazione di PDE in ODE

In riferimento alla definizione della sezione precedente, in questa citeremo uno degli approcci più naturali con cui si affronta per la prima volta un PDE del primo ordine. L'idea fondamentale è quella di trasformare il PDE, che avrebbe per soluzione una ipersuperficie di dimensione n soddisfacente l'unico vincolo di appartenenza all'insieme di livello zero della funzione F definita su di uno spazio di dimensione $2n + 1$, in un nuovo problema. Questo problema avrà per soluzione una famiglia di traiettorie vincolate sul bordo Γ , in cui la funzione u è nota come g , che penetrano nell'insieme U rispettando $(2n+1)$ opportune equazioni differenziali di una variabile (quindi ODE) denominate *equazioni caratteristiche associate al PDE*.

Possiamo definire una generica traiettoria originata a partire dal bordo di U nel modo seguente: $\mathbf{x} : s \in [0, \infty) \rightarrow \mathbf{x}(s)$ tale che $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$, $\mathbf{x}(s) \in \bar{U}$. Gli altri argomenti della funzione F potranno essere parametrizzati a loro volta in funzione della traiettoria $\mathbf{x}(s)$ così: $z(s) := u(x(s))$, $\mathbf{p}(s) := Du(x(s))$, $p^i(s) = u_{x_i}(x(s))$. Derivando rispetto alla variabile s la funzione $\mathbf{p}(s)$ otteniamo

$$\dot{p}^i(s) = \sum_j^n u_{x_i x_j}(x(s)) \cdot \dot{x}(s) \quad \text{con} \quad \frac{d}{ds}(\cdot) := (\dot{\cdot}), \quad (1.2)$$

differenziando rispetto a \mathbf{x}_i la F si ha : $D_{x_i}(F(Du, u, x) = 0)$

$$\begin{aligned} D_{x_i} F(Du, u, x) &= \\ &= \underbrace{D_{x_i} F(\cdot, z, x)|_{(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s))}}_A + \underbrace{D_{x_i} F(p, \cdot, x)|_{(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s))}}_B + \\ &+ \underbrace{D_{x_i} F(\mathbf{p}, z, \cdot)|_{(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s))}}_C \end{aligned}$$

$$A = \sum_j^n D_{p^j} F(\mathbf{p}, z, \mathbf{x}) \cdot \frac{\partial p^j}{\partial x_i} = \sum_j^n D_{p^j} F(Du, u, x) u_{x_i}$$

$$B = \frac{\partial F(\mathbf{p}, z, \mathbf{x})}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial F(Du, u, x)}{\partial z} \cdot u_{x_i}$$

$$C = \sum_j^n \frac{\partial F(Du, u, x)}{\partial x_i}$$

dunque:

$$\sum_j^n D_{p_j} F(Du, u, x) u_{x_i} + \frac{\partial F}{\partial z}(Du, u, x) \cdot u_{x_i} + \sum_j^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(Du, u, x) = 0. \quad (1.3)$$

Osserviamo che la presenza delle derivate seconde ci costringe a considerare necessaria una richiesta di regolarità C^2 per la u . Assegnamo la seguente relazione alla traiettoria:

$$\dot{x}_i(s) = \frac{\partial F}{\partial p^i}(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)), \quad (1.4)$$

ossia imponiamo che il vettore tangente alla traiettoria $\mathbf{x}(s)$ appartenga allo spazio normale alla ipersuperficie dettata dalla F . Sfruttando la relazione nella (1.2) si ottiene:

$$\dot{p}^i(s) = -\frac{\partial F}{\partial z}(Du, u, x) \cdot u_{x_i} - \sum_j^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(Du, u, x) \quad (1.5)$$

Infine derivando anche $z(s) = u(x(s))$ otteniamo l'ultima relazione importante

$$\dot{z}(s) = \sum_j^n u_{x_j}(s) \cdot \dot{x}_j(s) = \sum_j^n p^j \frac{\partial F}{\partial p^j}(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) = D_p F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s). \quad (1.6)$$

Otteniamo quindi, riunendo le (1.5), (1.6), (1.4) le:

$$\text{Caratteristiche} \begin{cases} \text{(a) } \dot{\mathbf{p}}(s) = -D_x F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) - D_z F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s) \\ \text{(b) } \dot{z}(s) = D_p F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s) \\ \text{(c) } \dot{\mathbf{x}}(s) = D_p F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)). \end{cases} \quad (1.7)$$

Chiudiamo questa sezione riassumendo in un teorema le ipotesi necessarie e sufficienti per la ricerca delle equazioni caratteristiche (che rispecchino un dato PDE).

Teorema 1.1.

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) u \in C^2(U); \\ (ii) u \text{ risolve il PDE (1.1);} \\ (iii) x(s) \text{ risolve la (1.7)(c).} \end{array} \right. \quad (1.8)$$

Allora $p(s)$ ed $z(s)$ risolvono rispettivamente (1.7)(a)e(b).

1.3 Equazioni di compatibilità

Dopo esserci occupati della forma delle equazioni caratteristiche, nell'ottica di voler rappresentare le caratteristiche per integrazione a partire dal valore noto sul bordo, è necessario fare alcune considerazioni sulla funzione g . In prima istanza è noto che qualsiasi bordo ∂U sufficientemente regolare può essere rappresentato come 1-grafico di $n - 1$ variabili, ne consegue, che tale bordo $x_n = \gamma(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ possa essere rettificato con un cambio di variabili $y = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n - \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}))$ che faccia corrispondere all'ultima variabile il valore nullo, cioè $y = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$. Quindi in realtà l'equazione u al bordo sarà funzione di $n-1$ variabili: $u(y) = g(x_1, \dots, x_{n-1})$. Per fissare le idee posto $t = 0$ l'istante iniziale in cui le caratteristiche partono dal bordo, risulta facile scegliere un punto del bordo $x^0 \in \Gamma \subseteq \partial U$ e definire $z^0 = u(x^0) = g(x^0)$. Altra questione invece è la scelta di p^0 , infatti dopo aver rettificato Γ deve accadere che $p^i = g_{x_i}(x^0)$ per $i = 1, \dots, n - 1$ e che $F(p^0, z^0, x^0) = 0$.

Ricapitolando, chiamiamo *equazioni di compatibilità del dato al bordo* nel punto x^0 le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} z^0 = u(x^0) = g(x^0) \\ p^i = g_{x_i}(x^0) \\ F(p^0, z^0, x^0) = 0. \end{array} \right. \quad (1.9)$$

Volendo risolvere l'ODE partendo dal bordo anche intorno a x^0 ci chiediamo se è possibile perturbare la tripletta ammissibile (p^0, z^0, x^0) per formarne un'altra che soddisfi ancora le (1.9). Scelto un altro punto $y \in \Gamma$ tale che $y = (y_1, \dots, y_{n-1}, 0)$ sufficientemente vicino a x^0 esso dovrà soddisfare le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} x^0 = y \\ z^0 = g(y) \\ p^0 = q(y) \end{cases} \quad (1.10)$$

L'obiettivo è quello di trovare una funzione $q(\cdot) = [q^1(\cdot), \dots, q^n(\cdot)]$ tale che $q(x^0) = p^0$, ossia coincida con il valore della tripletta già ammissibile in corrispondenza di $g(x^0) = p^0$. Le equazioni di compatibilità a cui deve sottostare tale funzione q naturalmente sono:

$$\begin{cases} q^i = g_{x_i}(y) & i = 1, \dots, n-1. \\ F(q(y), g(y), y) = 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

e devono valere per ogni $y \in \Gamma$.

Lemma 1.2 (Noncaratteristiche). *Esiste ed è unica la funzione $q(\cdot)$ che soddisfi le (1.11).*

Dimostrazione. Possiamo esprimere il sistema precedente con una funzione G di $2n-1$ variabili (p, y) in \mathbb{R}^n così definita:

$$\begin{cases} G(p, y) = p^i - g_{x_i}(y) & i = 1, \dots, n-1. \\ G(p, y) = F(q(y), g(y), y) = 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Affinchè sia possibile trovare un intorno $V_p \times V_y$ del punto (x^0, p^0) tale che per ogni $y \in V_y$ esista $p = q(y)$ con $p \in V_p$ per il *teorema della funzione implicita* è sufficiente che $|D_p G(p, y)|_{(x^0, p^0)} \neq 0$.

Ricordando che (x^0, p^0) soddisfa le $\begin{cases} q^i = g_{x_i}(y) & i = 1, \dots, n-1 \\ F(q(y), g(y), y) = 0 \end{cases}$

otteniamo che:

$$\begin{aligned}
|D_p G(p, y)|_{(x^0, p^0)} &= \det \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \hline F_{p^1}(p^0, z^0, x^0) & \dots & F_{p^{n-1}}(\dots) & F_{p^n}(p^0, z^0, x^0) \end{array} \right) \\
&= F_{p^n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

□

1.4 Soluzioni locali

In base al lemma di esistenza e unicità della funzione $q(y) = p$ associata ad un punto del bordo $y \in \Gamma$, tale che y soddisfi le equazioni di compatibilità (1.11) si possono fare le seguenti osservazioni:

- il sistema (1.7) ammette soluzione con dato iniziale

$$\begin{cases} x^0 = y \\ z^0 = g(y) \\ p^0 = q(y) \end{cases}$$

ovvero, questo dato è una tripletta ammissibile per y sufficientemente vicino a x .

- La soluzione $(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s))$ potrà dipendere esplicitamente anche dal dato iniziale y , quindi è possibile dargli la seguente forma :

$$\begin{cases} \mathbf{p}(s) = p(y, s) & y \in \mathbb{R}^{n-1}, s \in \mathbb{R} \\ z(s) = z(y, s) \\ \mathbf{x}(s) = x(y, s) \end{cases} \tag{1.14}$$

- se (p^0, z^0, x^0) è un dato ‘non caratteristico’ ossia verifica la relazione $F_{p^n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0$ allora esiste $q(p)$ tale che $p = q(y)$ e $q(x^0) = p^0$.

A questo punto è lecito chiedersi se, essendo (p^0, z^0, x^0) non caratteristica, sia possibile ottenere direttamente, a partire da un qualsiasi punto $x \in \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, un punto y del bordo (che serve a fissare una quota della caratteristica $g(y)$) e, un istante s in cui tale punto verrà investito dalla funzione $z(y, s)$. Il prossimo lemma mostra proprio che la condizione di ‘tripletta noncaratteristica’ è sufficiente per l’invertibilità locale delle relazioni (1.14).

Lemma 1.1 (di locale invertibilità). Supponiamo che valga la relazione: $F_{p^n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0$. Allora: esiste un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ tale che $0 \in I$, un intervallo $W \subset \Gamma \subset \mathbb{R}^{n-1}$ tale che $x^0 \in W$, e $V \subset \mathbb{R}^n$ tale che per ogni $x \in V$ esiste un $s \in I$ ed un $y \in W$ tali che

$$x = \mathbf{x}(y, s)$$

e che la mappa $x \mapsto y, s$ sia C^2 .

Dimostrazione. Sappiamo che $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(y, s)$ per la (1.14), e per $(s = 0, y = x^0)$ risulta $y = \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(y, 0)$ e per $y = x^0$ allora $x^0 = \mathbf{x}(x^0, 0)$. Dato che $\mathbf{x} : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, definiamo $G : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ come $G(y, s, x) = \mathbf{x} - x$. Chiaramente: $G(x^0, 0, x^0) = 0$ perchè $\mathbf{x}(x^0, 0) - x^0 = 0$. Se $|D_{y,s}G(x^0, 0, x^0)| \neq 0$ si potrebbe applicare il teorema della *funzione inversa* e la tesi verrebbe da se. Mostriamo quindi che la relazione precedente è equivalente all’ipotesi di *noncaratteristicità*: differenziando si ottiene $\frac{\partial}{\partial y_j} G^i = \frac{\partial}{\partial y_j} (\mathbf{x}(y, s) - x)^i = \frac{\partial \mathbf{x}^i(y, s)}{\partial y_j}$ e calcolando in $(y, 0)$ segue che essendo $\mathbf{x}^i(y, 0) = y^i$ per $i = 1, \dots, n-1$, $\mathbf{x}^n(y, 0) = 0$. Quindi $\frac{\partial}{\partial y_j} G^i(y, 0) = \frac{\partial}{\partial y_j} y^i = \delta_j^i, \forall y \in W$ e quindi anche in $y = x^0$.

Riassumendo:

$$\frac{\partial}{\partial y_j} G^i(x^0, 0) = f(n) := \begin{cases} \delta_j^i & \text{se } i = 1, \dots, n-1, \\ 0 & \text{se } i = n. \end{cases}$$

Infine differenziando rispetto a s : $\frac{\partial}{\partial s} G^i(y, s) = \frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{x}^i(y, s)) = \frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{x}^i(s)) = D_{p^i} F(\mathbf{p}(s)), z(s), \mathbf{x}(s))$ per la terza delle (1.7). Dunque

$$\frac{\partial}{\partial s} G^i(x(o), 0) = D_{p^i} F(\mathbf{p}(s)), z(s), \mathbf{x}(s))$$

Ricapitolando:

$$|D_{y,s} G(x^0, 0, x^0)| = \det \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \dots & 0 & F_{p^1}(p^0, z^0, x^0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & F_{p^{n-1}} \\ \hline 0 & \dots & 0 & F_{p^n}(p^0, z^0, x^0) \end{array} \right) = F_{p^n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0^1 \quad (1.15)$$

Dunque $\forall x \in V, \exists \mathbf{y}(\cdot), s(\cdot), (s, y) \in (V \times I)$, tali che $y = \mathbf{y}(x), s = s(x)$. Dato che tali (s, y) soddisfano le relazioni (1.14) possiamo definire due nuove funzioni che dipendono direttamente dalla variabile x :

$$\begin{cases} p(x) := p(\mathbf{y}(x), s(x)) \\ u(x) := z(\mathbf{y}(x), s(x)) \end{cases} \quad (1.16)$$

□

¹Dove abbiamo adottato la seguente notazione per la matrice associata al differenziale:

$$[D_x \mathbf{F}] = \begin{pmatrix} D\mathbf{F}^1 \\ D\mathbf{F}^2 \\ \vdots \\ D\mathbf{F}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{x_1} & D\mathbf{F}_{x_2}^2 & \dots & D\mathbf{F}_{x_n}^n \end{pmatrix}$$

Infine citiamo un teorema che lega direttamente le funzioni (1.16) di cui è già stata dimostrata l'esistenza locale, alla soluzione del PDE ((1.1)).

Teorema 1.3 (di esistenza locale). *La funzione u definita come:*

$$\begin{cases} p(x) := p(\mathbf{y}(x), s(x)) & \forall x \in V \\ u(x) := z(\mathbf{y}(x), s(x)) \end{cases} \quad (1.17)$$

1. è C^2 .

2. risolve localmente il problema ((1.1))

$$\begin{cases} F(Du, u, x) = 0 & \text{per } (x \in V) \\ u = g & \text{per } \Gamma \cap V. \end{cases} \quad (1.18)$$

Dimostrazione. Fissiamo x^0 , noncaratteristico, $y \in \Gamma$ sufficientemente vicino a x^0 in modo che valgano le (1.7), con dato al bordo (1.4). Articoleremo la dimostrazione in due fasi.

Prima mostreremo che :

$$F(\mathbf{p}(x), z(x), x) = 0$$

e poi che

$$\mathbf{p}(x) = Du(x).$$

1. Poniamo :

$$f(y, s) := F(\mathbf{p}(y, s), z(y, s), x(y, s)) \quad (1.19)$$

Mostrando che $f(y, 0) = 0$ e che $\dot{f}(y, s) = 0$ otterremo la tesi. Si ha

$$f(y, 0) = F(\mathbf{p}(y, 0), z(y, 0), x(y, 0)) = F(\mathbf{q}(y), g(y), y) \quad (1.20)$$

che è nulla per le equazioni di compatibilità (1.11).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial s}(y, s) &= \sum_i^n \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}^i + \frac{\partial F}{\partial z} \dot{z} + \sum_i^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \dot{x}^i = 2 \\
&= - \sum_i^n \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} - \sum_i^n \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial z} p^i + \sum_i^n \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial z} p^i + \sum_i^n \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Quindi da $f(y, 0) = 0$ e $\dot{f}(y, s) = 0$ otteniamo che $0 = f(y, s) = F(\mathbf{p}(y, s), z(y, s), x(y, s))$ per ogni $s \in \mathbb{R}$ e dal lemma di invertibilità locale esistono $y = y(x), s = s(x), y \in W, s \in I$ tali da poter scrivere $F(\mathbf{p}(x), u(x), x) = 0$.

2. Resta da mostrare che $\mathbf{p}(x) = Du(x)$. A tal fine dobbiamo prima far vedere che sussistono le seguenti due relazioni:

$$\frac{\partial z}{\partial s}(y, s) = \sum_j^n p^j \frac{\partial x^j}{\partial s} \tag{1.22}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y^i}(y, s) = \sum_j^n p^j(y, s) \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(y, s) \text{ per } i = 1, \dots, n-1 \tag{1.23}$$

La prima è verificata dalla seconda delle (1.7). Per la seconda fissiamo $y \in \Gamma$, e definiamo

$$r^i(s) := \frac{\partial z}{\partial y^i}(y, s) - \sum_j^n p^j(y, s) \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(y, s) \text{ per } i = 1, \dots, n-1. \tag{1.24}$$

Vorremmo dimostrare che $r^i(s) = 0$.

Innanzitutto $r^i(0) = \frac{\partial z}{\partial y^i}(y, 0) - \sum_j^n p^j(y, 0) \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(y, 0) = \frac{\partial}{\partial y^i}(y, 0)(z(y, 0) = g(y)) = \frac{\partial}{\partial y^i} g(y) = g_{x_i}(y)$, $p^i(y, 0) = q^i(y)$, allora $r^i(0) = g_{x_i}(y) - q^i(y) = 0$ per (1.7). Differenziamo $r^i(s)$:

$$\frac{\partial}{\partial s} r^i(s) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^i \partial s}(y, s) - \sum_j^n \left[\dot{p}^j(y, s) \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(y, 0) - p^j(y, s) \frac{\partial^2 x^j}{\partial y^i \partial s}(y, s) \right], \text{ e poi } \dot{z}(y, s)$$

ottenendo: $\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right) = \sum_j^n \frac{\partial p^j}{\partial y_i} \frac{\partial x^j}{\partial s} + p^j \frac{\partial^2 x^j}{\partial s \partial y_i}$. $\frac{\partial}{\partial s} r^i(s) = \sum_j^n \frac{\partial p^j}{\partial y_i} \frac{\partial x^j}{\partial s} + p^j \frac{\partial^2 x^j}{\partial s \partial y_i} - \dot{p}^j \partial x^j \partial y^i - p^j \frac{\partial^2 x^j}{\partial s \partial y_i} = \sum_j^n \frac{\partial p^j}{\partial y_i} \frac{\partial x^j}{\partial s} - \dot{p}^j \partial x^j \partial y^i$. Sostituendo la \dot{p} con la sua caratteristica segue che $\frac{\partial}{\partial s} r^i(s) = \sum_j^n \frac{\partial p^j}{\partial y_i} [F_{p_j}] - [-F_z p^j - F_{x_j}] \frac{\partial x^j}{\partial y^i}$. Differenziando $f(y, s)$ segue che :

$$\sum_j^n F_{p_j} \frac{\partial p^j}{\partial y^i} + F_z p^j \frac{\partial x^j}{\partial y^i} + \sum_j^n F_{x_j} \frac{\partial x^j}{\partial y^i}$$

da cui, sostituendo $\sum_j^n F_{p_j} \frac{\partial p^j}{\partial y^i} + F_z p^j \frac{\partial x^j}{\partial y^i} = -\sum_j^n F_{x_j} \frac{\partial x^j}{\partial y^i}$ nella $\frac{\partial}{\partial s} r^i(s)$ si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial s} r^i(s) = F_z \sum_j^n \left[\frac{\partial p^j}{\partial y^i} - \frac{\partial z}{\partial y^i} \right] =$$

quindi $\frac{\partial}{\partial s} r^i(s) = -F_z r^i(s)$ che insieme a $r^i(0) = 0$ porta a $r^i(s) = 0$.

Ricordando la definizione $u(x) := z(\mathbf{y}(x), s(x))$, differenziamola per ottenere

$$\begin{aligned} \text{la tesi: } \frac{\partial}{\partial x_j} u^i(x) &= \sum_i^{n-1} \frac{\partial z}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_j} = \sum_i^{n-1} \sum_k^n p^k \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} + \sum_i^{n-1} p^k \frac{\partial x_i}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_j} \\ &= \sum_k^n p^k \left[\sum_i^{n-1} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} + \frac{\partial x_i}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_j} \right] = \sum_k^n p^k \delta_j^k = p^j \quad \square \end{aligned}$$

1.5 Prime conclusioni

Riassumiamo qui quanto discusso nei paragrafi precedenti. Assegnato il problema standard (1.1), il primo passo fondamentale è stato quello di imporre: le definizioni $\mathbf{p}(s) = Du(x(s))$ e $\dot{x}_i = \frac{\partial}{\partial p^j} F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s))$, ottenendo, ad ogni x^0 fissato, un insieme di $2n + 1$ equazioni ODE (1.7) di variabili $(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s))$. Si è ottenuto, attraverso il teorema (1.1), che se esiste una soluzione u , $C^2(U)$ del (1.1), e scelta una traiettoria $\mathbf{x}(s)$, che soddisfi la sopracitata definizione, allora la soluzione (Du, u, x) calcolata sulla traiettoria $\mathbf{x}(s)$ come $(\mathbf{p}(\cdot), z(\cdot), \mathbf{x}(\cdot))$ soddisferà il problema (1.7). Con l'ausilio di procedure di rettificazione si sono ottenute le equazioni di compatibilità (1.9), a

³dove abbiamo usato l'identità $\frac{\partial}{\partial x_j} x_i(y(x), s(x)) = \sum_k^n \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} + \frac{\partial x_i}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_j} = \delta_j^i$

cui un dato al bordo dell'ODE (1.7) deve *necessariamente* sottostare per rispecchiare il problema PDE da cui è stato generato, ed abbiamo osservato che mentre fissare x^0, z^0 discende in modo naturale dal dato sul bordo Γ , accade altrimenti per la scelta di p^0 , che dovendo soddisfare le (1.9) può addirittura non esistere. Supposta quindi, l'esistenza di una tripletta *ammissibile*, abbiamo discusso l'esistenza locale delle soluzioni dell'ODE, ed abbiamo osservato, attraverso il lemma (1.2) che l'esistenza di un dato *noncaratteristico* (ossia non soddisfacente le (1.13)) è *sufficiente* per la prolungabilità della soluzione a partire da nuovi dati al bordo ammissibili. Con la (1.1) abbiamo osservato inoltre che esiste un intorno di \mathbb{R}^n del dato x^0 in cui qualsiasi punto x può essere messo in corrispondenza biunivoca con un y del bordo sufficientemente vicino a x^0 , ed un istante s un cui l'equazione caratteristica $\mathbf{x}(s)$ coincide con x (ed a tali relazioni è stata data la forma $x = x(y, s)$ $y = y(x)$ $s = s(x)$). Infine queste relazioni hanno ispirato la definizione di una soluzione locale della forma $u(x) = z(y(x), s(x))$, $p(x) = p(y(x), s(x))$ per il problema (1.1), ed il teorema (1.3) ha convalidato tale intuizione. Concludiamo osservando che, in generale un ODE derivante da un PDE, può soddisfare quest'ultimo solo localmente perchè può accadere che la caratteristica $\dot{x}(s)$ rappresenti il supporto di una soluzione costante, e che due caratteristiche $u^1(x)$, $u^2(x)$ emanate da dati $u^1(x) = g((x^0)) \neq g((x^1)) = u^2(x)$ si intersechino compromettendo persino la continuità della soluzione del PDE da cui erano derivate le caratteristiche.

Capitolo 2

Le Equazioni di Hamilton-Jacobi

In questo capitolo, pur ricordando quanto maturato nel capitolo precedente a proposito della formulazione degli ODE e dell'esistenza delle soluzioni locali, baderemo direttamente alla ricerca di soluzioni globali delle equazioni di Hamilton-Jacobi (I.1). In prima istanza ricaveremo le *Equazioni di Hamilton* come *Caratteristiche* associate al problema PDE di (I.1). Inoltre, dopo aver posto la formulazione di un problema di *calcolo delle variazioni* noteremo (con un teorema) che una sua soluzione risolve anche il sistema delle *equazioni di Hamilton*. Ancora, ci concentreremo sulla definizione dell'operatore di trasformata di Legendre, ottenendone diverse definizioni, ed evidenziando le motivazioni che si celano dietro la richiesta di invertibilità della *mappa gradiente*. Infine daremo un teorema di dualità tra Lagrangiana ed Hamiltoniana attraverso la suddetta trasformata sull'insieme delle funzioni convesse e superlineari. Queste ipotesi saranno necessarie assieme a diverse proprietà della trasformata di Legendre per dimostrare un teorema di unicità di una soluzione particolare del problema: una soluzione cosiddetta *debole*.

2.1 ODE di Hamilton

Ricordiamo il problema standard.

$$\begin{cases} u_t + H(Du, x) = 0 & \text{per } (x, t) \in U := \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \\ u = g & \text{per } (x, t) \in \Gamma := \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (2.1)$$

Possiamo applicare naturalmente le relazioni di trasformazione del PDE in ODE alla Lagrangiana relativa all'equazione di Hamilton-Jacobi, sfruttando questa notazione: $F(Du, u_t, u, x, t) = u_t + H(Du) = 0$. Dunque le equazioni caratteristiche (1.7) in questo caso, dato che $F(p, p^{n+1}, z, x, t) = p^{n+1} + H(p, x)^1$, assumono la seguente forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}(s) = -D_x F - D_z F \mathbf{p}(s) \\ \dot{p}^{n+1}(s) = -F_t - D_z F p^{n+1}(s) \\ \dot{z}(s) = D_p F \cdot \mathbf{p}(s) + F_{p^{n+1}} p^{n+1}(s) \\ \dot{\mathbf{x}}(s) = D_p F \\ \dot{\mathbf{t}}(s) = D_{p^{n+1}} F \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}(s) = -D_x H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) - D_z H D_p H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s) \mathbf{p}(s) = -D_x H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \\ \dot{p}^{n+1}(s) = 0 \\ \dot{z}(s) = D_p H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s) + p^{n+1} \\ = D_p H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s) - H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s) \\ \dot{\mathbf{x}}(s) = D_p H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \\ \dot{\mathbf{t}}(s) = D_{p^{n+1}} H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}(s) = -D_x H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \\ \dot{z}(s) = D_p H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s) - H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \\ \dot{\mathbf{x}}(s) = D_p H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \end{cases} \quad (2.3)$$

¹con $x = (x^1, \dots, x^n, p = (p^1, \dots, p^n$

Sono $2n + 1$ equazioni di cui, da sole, le seguenti $2n$ costituiscono un sistema autonomo:

$$\text{Equazioni di Hamilton} \begin{cases} \dot{\mathbf{p}}(s) = -D_x H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \\ \dot{\mathbf{x}}(s) = D_p H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)). \end{cases} \quad (2.4)$$

2.1.1 Hamiltoniana indipendente dalla posizione

Cosideriamo il caso particolare in cui $H(p, x) = H(p)$. Le caratteristiche assumono la forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}(s) = 0 \\ \dot{\mathbf{x}}(s) = D_p H(\mathbf{p}(s)), \end{cases} \quad (2.5)$$

che per integrazione portano alle relazioni

$$\begin{cases} \mathbf{p}(s) = p^0 \\ \mathbf{x}(s) = x^0 + t D_p H(g_x(x^0)). \end{cases} \quad (2.6)$$

Attingendo dalla seconda delle equazioni del sistema precedente, possiamo considerare l' applicazione $X : \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, definita da:

$$X(x^0, t) = x^0 + t D H(D g(x^0)), \quad (2.7)$$

in cui sottointendiamo le variabili rispetto a cui sono fatte le derivate delle funzioni H e g . Vale il seguente risultato:

Lemma 2.1. *Supponiamo che $H \in C^2$ e che $g \in C^2$.*

Allora esiste un $T > 0$ tale che X sia un diffeomorfismo di classe C^1 su \mathbb{R}^n per ogni $t \in [0, T]$. Inoltre denotando con X_x, X_x^{-1} rispettivamente le matrici Jacobiane di X e della sua inversa X^{-1} , e con X_t, X^{-1}_t le derivate rispetto alla variabile t , si ha che:

$$\begin{aligned} (T1) \quad & X^{-1} \text{ è di classe } C^1 \\ (T2) \quad & X_x(X^{-1})_x = I, \quad X_x(X^{-1})_t + X_t = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Questo lemma è una versione particolare, e più sintetica, dei ragionamenti fatti nel capitolo precedente a proposito dell' esistenza delle soluzioni locali (lemma di invertibilità locale 1.1). Inoltre vale il seguente risultato che mostra la forma delle soluzioni del problema (2.1) sfruttando il lemma precedente.

Teorema 2.2. *Siano: $H \in C^2$, $g \in C^2$.*

Allora esiste $T > 0$ tale che la funzione

$$u(x, t) = g(X^{-1}(x, t)) + t[DH(Dg(X^{-1}(x, t))) \cdot Dg(X^{-1}(x, t)) - H(Dg(X^{-1}(x, t)))] \quad (2.9)$$

è ben definita in $[0, T] \times \mathbb{R}^n$, è $C^1([0, T] \times \mathbb{R}^n)$, ed ivi risolve il problema (2.1).

2

Osservazione 2.3. (Esistenza di soluzioni globali).

1. Se H e g sono funzioni *convesse* allora *esistono soluzioni globali*.

Infatti in tale caso $D^2H(p)$ e $D^2g(x)$ sono matrici simmetriche semidefinite positive per ogni p ed x . Ne segue che gli autovalori $\lambda_i(x)$ della matrice $D^2H(p)(Dg(x))D^2g(x)$ sono reali e non negativi per ogni x . Di conseguenza gli autovalori di $X_x(x, t) = I + tD^2H(p)(Dg(x))D^2g(x)$, che sono dati da $1 + \lambda_i(x)$ per ogni $(x, t) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, sono sempre maggiori a 1 e quindi $\det[X_x(x, t)] \geq 1 > 0$. In questo caso allora X è un diffeomorfismo globale in $[0, +\infty)$.

2. Un altro caso in cui l'applicazione $X(x, t)$ è un diffeomorfismo per ogni $t \in [0, +\infty)$ è il caso in cui la funzione g è una *funzione affine* ossia:

$$g(x) = A \cdot x + c$$

²per i dettagli dei risultati di questa sezione vedi [5]

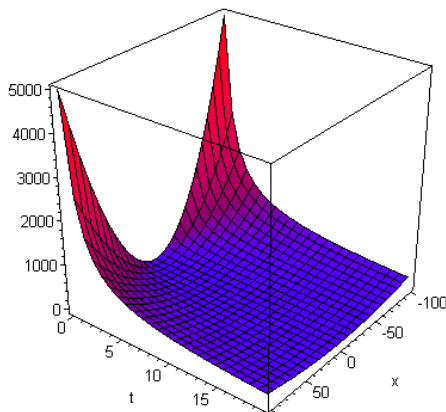


Figura 2.1: Soluzione globale relativa al problema (2.67) per $n = 1$

Riportiamo alcuni esempi di quanto appena affermato:

Esempio 1 (H e g convesse). Consideriamo il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}u_x^2 = 0 & \text{per } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \\ u = \frac{1}{2}x^2 & \text{per } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (2.10)$$

Scrivendo la definizione di $X(x^0, t)$ si ottiene subito:

$$x = X(x^0, t) = (1 + t)x^0 \quad X_{x^0} = 1 + t \geq 1 > 0.$$

Da essa si può ricavare un' inversa globale ed ottenere:

$$x^0 = X^{-1}(x, t) = \frac{x}{1 + t}$$

ed applicando la formula (2.9) si ha:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \frac{x^2}{1 + t}.$$

Osservazione 2.4. Come si è affermato nelle conclusioni del precedente capitolo, si può immaginare che se le caratteristiche danno luogo ad un insieme

di rette parallele si riesce ad invertire la funzione X ovunque, e dunque a determinare una soluzione globale. Se le caratteristiche invece si intersecassero, allora nei punti di intersezione non si potrebbe più invertire la funzione X poichè la controimmagine è costituita da punti distinti. In questo caso T assume il ruolo del più grande istante per cui le linee caratteristiche non presentano punti di intersezione. In corrispondenza di tali intersezioni le soluzioni avranno delle discontinuità denominate *caustiche* in ottica geometrica, e *shocks* in teoria delle piccole oscillazioni.

Esempio 2 (Shocks). Esempi di shocks si possono avere quando una delle due funzioni H e g è concava e l'altra convessa. Accade infatti che la soluzione esploda in tempi finiti come confermano i seguenti due problemi.

$$\begin{cases} u_t - \frac{1}{2}u_x^2 = 0 & \text{per } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \\ u = \frac{1}{2}x^2 & \text{per } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (2.11)$$

Operando come nell'esempio precedente si giunge alle seguenti relazioni: $X(x^0, t) = (1 - t)x^0$, $X_{x^0} = 1 - t$, $X^{-1}(x, t) = \frac{x}{1-t}$ e per soluzione

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \frac{x^2}{1-t}$$

valida fino ad 1^- . Lo stesso vale nel caso opposto:

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}u_x^2 = 0 & \text{per } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \\ u = -\frac{1}{2}x^2 & \text{per } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (2.12)$$

$X(x^0, t) = (1 - t)x^0$, $X_{x^0} = 1 - t$ ed $X^{-1}(x, t) = \frac{x}{1-t}$

$$u(x, t) = -\frac{1}{2} \frac{x^2}{1-t}.$$

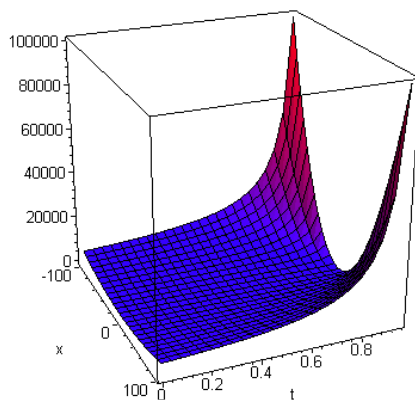


Figura 2.2: Soluzione relativa al problema (2.11) per $n = 1$

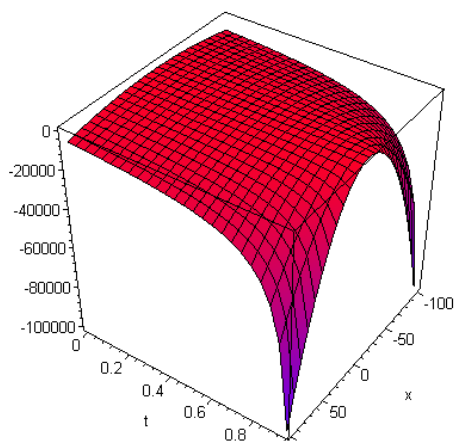


Figura 2.3: Soluzione relativa al problema (2.12) per $n = 1$

2.2 Soluzione di un problema di calcolo delle variazioni

In questa sezione introdurremo un nuovo, anche se pur classico, approccio alla trattazione delle (2.4): quello della *formulazione Lagrangiana*, dando una prima versione di un problema di calcolo delle variazioni, la cui soluzione assumerà la forma delle *equazioni di Hamilton*, e dedurremo sotto certe ipotesi, l'equivalenza tra le due formulazioni.

Consideriamo una funzione $L = L(q, x)$ con $L : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, che di qui in poi sarà chiamata *Lagrangiana*.³ Supponendo per il momento che $L \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, definiamo *funzionale d'azione* I sulla *classe delle funzioni ammissibili* \mathcal{A} in questo modo:

$$I[\mathbf{w}(\cdot)] := \int_0^t L(\dot{\mathbf{w}}(s), \mathbf{w}(s)) ds \quad \left(\cdot = \frac{d}{ds} \right) \quad (2.13)$$

$$\mathcal{A} := \{ \mathbf{w}(\cdot) \in C^2([0, t]; \mathbb{R}^n) \mid \mathbf{w}(0) = \mathbf{y}, \mathbf{w}(t) = \mathbf{x} \}. \quad (2.14)$$

Il problema base di calcolo delle variazioni può essere posto chiedendosi: l'esistenza, l'unicità ed eventualmente la forma dell'elemento $\mathbf{x}(\cdot)$ della classe \mathcal{A} tale da soddisfare la seguente relazione:

$$I[\mathbf{x}(\cdot)] = \min_{\mathbf{w}(\cdot) \in \mathcal{A}} I[\mathbf{w}(\cdot)]. \quad (2.15)$$

In letteratura esistono diverse nozioni di soluzione del problema (2.15) che rispondono al nome di *minimizzatori*. Riferendoci alla definizione descritta in [1] un *minimizzatore* (di qualche genere) deve essere in primo luogo un *estremale* ovvero deve soddisfare la condizione di stazionarietà, dettata dall'annullamento della cosiddetta *derivata variazionale*, per ogni funzione test appartenente all'insieme C_c^∞ . Un minimizzatore è un *estremale* (forte) oppure un *estremale debole* a secondo che annulli la derivata variazionale nel

³ $L(q, x) := L(q_1, q_2, \dots, q_n; x_1, x_2, \dots, x_n)$, $DL := (D_q L, D_x L)$

senso di condizioni di *Eulero-Lagrange* rispettivamente più o meno forti. In questa trattazione richiederemo che tale minimizzatore soddisfi la condizione di estremale (forte) che riportiamo nella forma seguente:

$$-\frac{d}{ds}L_{q_i}(\dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s)) + L_{x_i}(\dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s)) = 0 \quad (2.16)$$

per $0 < s \leq t$, $i = 1, \dots, n$. Le condizioni sufficienti per definire la (2.16) sono: $L(q, x)$ tale che $L_q \in C^1$, $L_x \in C^0$ ed $\mathbf{x}(s) \in C^2(0, t)$. Intendiamo ora, porre due definizioni fondamentali: quella di *momento generalizzato* e di funzione *Hamiltoniana* per mostrare attraverso un teorema come la coppia costituita da un *estremale* del problema (2.15) e dal *momento generalizzato* soddisfi il sistema delle *equazioni di Hamilton* (2.4).

1. Il *momento generalizzato* corrispondente alla funzione critica $\mathbf{x}(s)$ per il funzionale d'azione (2.15) in questo modo:

$$\mathbf{p}(s) := D_q L(\dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s)) \quad 0 < s \leq t, \quad (2.17)$$

supponendo che la mappa $p = D_q L(q, x)$ definita per ogni x, p sia *globalmente invertibile* rispetto alla variabile q dando luogo alla funzione $q = \mathbf{q}(p, x)$ ⁴ ed intendendo con ciò che $\dot{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{q}(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s))$.

2. L'*Hamiltoniana* H associata alla *Lagrangiana* L come segue:

$$H(p, x) := p \cdot \mathbf{q}(p, x) - L(\mathbf{q}(p, x), x) \quad p, x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.18)$$

Teorema 2.5. (*ODE vs calcolo delle variazioni*). La funzione $\mathbf{x}(\cdot)$ che ottimizza il funzionale d'azione (2.15) ed il momento generalizzato $\mathbf{p}(\cdot)$ soddisfanno il sistema di “equazioni di Hamilton” nel senso delle caratteristiche ossia rendendo costante l'Hamiltoniana sulla traiettoria $(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s))$.

⁴ipotesi, che sarà soddisfatta dalle condizioni (2.1) riguardanti la mappa gradiente.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}(s) = -D_x H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \\ \dot{\mathbf{x}}(s) = D_p H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \quad \text{per } 0 \leq s \leq t \end{cases} \quad (2.19)$$

Dimostrazione. Ricordando che: $\mathbf{x}(s)$ deve soddisfare la (2.16) differenziamo l'Hamiltoniana ricordando che deve accadere che: $\mathbf{p}(s) := D_q L(\dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s))$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} (p \cdot \mathbf{q}(p, x) - L(\mathbf{q}(p, x), x)) = \\ &= \frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot q + \frac{\partial q}{\partial x_i} \cdot p - \left[\frac{\partial}{\partial x_i} L(\mathbf{q}(p, x), \cdot) + \frac{\partial}{\partial x_i} L(\cdot, x) \right] = \\ &= \frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot q + \frac{\partial q}{\partial x_i} \cdot p - \underbrace{\sum_j^n \frac{\partial}{\partial q_j} L(\mathbf{q}(p, x), x) \cdot \frac{\partial q_j}{\partial x_i}}_{p_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} L(q, x) = \\ &= 0 \cdot q + \underbrace{\frac{\partial q}{\partial x_i} \cdot p - \sum_j^n p_j \cdot \frac{\partial q_j}{\partial x_i}}_0 - \frac{\partial}{\partial q_j} L(q, x) = -\frac{\partial}{\partial q_j} L(q, x) \\ \frac{\partial H}{\partial p_i}(p, x) &= \\ &= \sum_j^n \delta_i^j q^j + p^j \frac{\partial q^j}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q^j}{\partial p_i} \\ &= q^i + \sum_j^n \underbrace{\left[p^j - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right]}_{=0} \frac{\partial q^j}{\partial p_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x_i}(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) &= \\ &= -\frac{\partial L}{\partial x_i}(\mathbf{q}(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)), \mathbf{x}(s)) = -\frac{\partial L}{\partial x_i}(\dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s)) \\ &= -\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial L}{\partial q_i}(\dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s)) = -\frac{\partial}{\partial s}(\mathbf{p}^i(s)) = \dot{\mathbf{p}}^i(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial s}(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) &= \\ &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p^i}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial x^i}{\partial s} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{\mathbf{p}}^i + \frac{\partial H}{\partial x_i} \dot{\mathbf{x}}^i \\ &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial x_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = 0 \end{aligned}$$

□

Nella prossima sezione, interromperemo la trattazione delle equazioni di Hamilton, conducendo una digressione sulla trasformata di Legendre per mostrare le ipotesi sufficienti affinché la Lagrangiana possa essere vista come trasformata di Legendre dell' Hamiltoniana, e viceversa.

2.3 Mappa gradiente e la Trasformata di Legendre

In questa sezione introdurremo uno strumento necessario per le successive trattazioni del dualismo Lagrangiano-Hamiltoniano: *la trasformata di Legendre*. Essa verrà introdotta prima come un ‘diffeomorfismo’ tra due spazi dotati di caratteristiche sufficientemente forti perchè possa avere proprietà di *involuzione*. Dopodichè, tale definizione iniziale sarà sostituita da una più debole, ma che risulti comunque *involutoria* su spazi lievemente più ampi (ma non troppo) di quelli originari.

Definizione 2.1. Supponiamo di avere un funzione $f(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, di classe C^2 . Possiamo definire una mappa $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ponendo:

$$\xi = \varphi(x) = f_x(x), \quad x \in \Omega \quad (2.20)$$

dove f_x rappresenta il gradiente di f , $f_x = (f_{x^1}, f_{x^2}, \dots, f_{x^n})$.

La funzione φ è detta *mappa gradiente associata alla funzione f* ; chiaramente, $\varphi \in C^{s-1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Lemma 2.6. *La mappa gradiente φ è localmente invertibile se :*

$$\det(f_{x^\alpha x^\beta}), \neq 0 \quad x \in \Omega \quad . \quad (2.21)$$

Se Ω è convesso e se la matrice Hessiana $f_{xx} = D^2 f = (f_{x^\alpha x^\beta})$ è definita positiva ⁵ su Ω , allora la mappa gradiente (2.3) è un diffeomorfismo di classe C^{s-1} di Ω su $\Omega^ = \varphi(\Omega)$.*

Dimostrazione. 1. Per definizione di *mappa gradiente* (2.3) ed il *teorema della funzione inversa* si ottiene subito che se $D_x f_x = f_{xx} \neq 0$ allora $\varphi_x \neq 0$.

⁵indicata solitamente così: $f_{xx} > 0$

2. Resta da mostrare che $f_{xx} > 0 \Rightarrow \varphi$ è localmente invertibile. Supponiamo per assurdo che: $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ per qualche x_1, x_2 in Ω . Posto $x = x_2 - x_1$, per convessità di Ω segue che $x_1 + tx \in \Omega \forall t \in [0, 1]$. Inoltre posta $A(t) := f_{xx}(x_1 + tx)$, essa è una matrice *definita positiva* e *continua* in t (dato che f_{xx} lo è in Ω). Quindi :

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) = \varphi(x_2) &\Rightarrow \\ 0 = \langle x, \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \rangle &= \left\langle x, \int_0^1 \frac{d}{dt} \varphi(x_1 + tx) dt \right\rangle \\ &= \int_0^1 \langle x, A(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

□

Assunzioni Generali 2.1. (Requisiti sufficienti e definizioni)

1. $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega^* : \varphi(\Omega)$ sia *globalmente invertibile* ($\Leftarrow D^2 f >, < 0$)
2. $\psi := \varphi^{-1}, \quad \Omega \leftarrow \Omega^*$

$$\begin{aligned} \xi = \varphi(x) = f_x(x) & \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) & \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \\ x = \varphi^{-1}(\xi) = \psi(\xi) & \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) & \quad \psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) \end{aligned}$$

2.3.1 Trasformata di Legendre

Definiamo le proprietà necessarie che un operatore (che in seguito sarà chiamata *trasformata di Legendre*) dovrà soddisfare per essere consistente con il risultato del Lemma 2.6.

Definizione 2.2. Trasformata di Legendre (1^a versione)

Sia $\xi \in \Omega^*$ variabile definita nella 2.1. Definiamo *trasformata di Legendre di f* la funzione

$$f^*(\xi) := x \cdot \xi - f(x). \tag{2.22}$$

con $x = \psi(\xi)$. Dunque per definizione di ψ risulta che $f^*(\xi) := [x \cdot f_x(x) - f(x)]_{x=\psi(\xi)}$

Il primo risultato che citiamo è un lemma di regolarità della funzione trasformata, data quella della funzione di partenza.

Lemma 2.1 (di Regolarità). *Se f è di classe $C^s(\Omega)$ allora f^* è di classe $C^s(\Omega)$.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che per definizione $f^*(\xi) = f_x(x) - f(x)]_{\psi(\xi)}$ $f^* \in C^{s-1}(\Omega^*)$ dato che, $f_x(x)$ lo è. Inoltre, $f^*(\xi) = \xi_\alpha \psi^\alpha(\xi) - f(\psi(\xi))$

$$\begin{aligned} df^*(\xi) &= d\xi_\alpha \psi^\alpha(\xi) + \xi_\alpha d\psi^\alpha(\xi) - f_{x^\alpha}(\psi(\xi))d\psi^\alpha(\xi) \\ &= d\xi_\alpha \psi^\alpha(\xi) + \underbrace{[\xi_\alpha - f_{x^\alpha}(\psi(\xi))]}_0 d\psi^\alpha(\xi) - f(\psi(\xi)) \\ &= d\xi_\alpha \psi^\alpha(\xi) \end{aligned}$$

$df^*(\xi) = f^*(\xi^\alpha)d\xi^\alpha = \psi^\alpha(\xi)d\xi^\alpha \Rightarrow f_{\xi^\alpha}^* = \psi^\alpha$, $f_\xi^*(\xi) = \psi(\xi)$ e dato che : $\psi(\xi) = f_{x_i}^{-1}(\xi)$ e $f_x(x) \in C^{s-1} \Rightarrow \psi(\xi) = f_x^{-1}(\xi) \in C^{s-1}$ $f_\xi^*(\xi) = \psi(\xi) \in C^{s-1} \Rightarrow \psi(\xi) \in C^{s-1}$ $f^* \in C^s$. □

Osservazione 2.7. Per definizione di ψ e ϕ è vera la seguente identità: $x = \psi(\phi(x))$. Differenziando la precedente equazione si ottiene che $\frac{dx}{dx_i} = \frac{d\psi(\xi)}{d\xi^\alpha} \frac{d\phi^\alpha(x)}{dx_i}$ $\Rightarrow I = D\psi(\xi)D\phi(x) \Rightarrow I = f_{\xi\xi}^*(\xi)f_{xx}(x) \Rightarrow f_{\xi\xi}^* = f_{xx}(x)^{-1}$. Quest' ultima uguaglianza mostra che se $f \in C^2$ localmente e $D^2f \neq 0$, allora f è convessa (conacava) se e solo se f^* lo è ⁶.

Ricordiamo la definizione di *uniforme convessità*:

Definizione 2.3. Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, di classe $C^2(\mathbb{R}^n)$ si dice *uniformemente convessa* se esiste una costante $\theta > 0$ tale che :

$$\sum_{i_1, i_2=1}^n f_{x_1 x_2}(x) \xi_{i_1} \xi_{i_2} \geq \theta |\xi|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.23)$$

⁶dato che $f_{\xi\xi}^* f_{xx}(x)$ devono avere necessariamente lo stesso segno

La più piccola costante $\theta > 0$ per cui vale la (2.23) è detta *costante di uniforme convessità*

Definizione 2.4. Date due matrici A e B simmetriche $n \times n$, scriviamo $A \geq B$ per indicare che $A - B$ è *semidefinita positiva*.

Osservazione 2.8. Possiamo dedurre delle limitazioni per le matrici delle derivate seconde di f e f^* . Essendo f_{xx} non singolare, *esiste sempre* una matrice del cambiamento di base M che diagonalizza sia f_{xx} che $f_{\xi\xi}^*$. Ponendo: $f_{xx} = A$, $f_{\xi\xi}^* = B$ ed \tilde{A} la matrice diagonale corrispondente a f_{xx} secondo la definizione: $\tilde{A} = M f_{xx} M^{-1}$, allora $\tilde{A} = B^{-1} M A M^{-1} = M B^{-1} M^{-1} = M^{-1} B M = \tilde{B}^{-1}$. Ora detti $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ gli autovalori di \tilde{A} e $\{\mu_1 = 1/\lambda_1, \dots, 1/\mu_n \lambda_n\}$ quelli di \tilde{B} . Allora se f è *uniformemente convessa* la relazione $f_{xx}(x) \geq \theta I$ vuol dire che il più piccolo autovalore di f_{xx} è maggiore di θ e il più grande di $f_{\xi\xi}$ è minore di $1/\theta$.

Quindi è lecita la seguente catena di implicazioni: $f_{xx}(x) \geq \theta I$, $I = f_{\xi\xi}^*(\xi) f_{xx}(x) \Rightarrow f_{xx}(x) - \theta I \geq 0, \Rightarrow f_{\xi\xi}^*(f_{xx}(x) - \theta I) \geq 0 \Rightarrow (I - f_{\xi\xi}^* \theta I) \geq 0 \Rightarrow f_{\xi\xi}^* \leq \frac{1}{\theta} I$.

Dunque riassumendo:

$$f_{xx}(x) \geq \theta I \Leftrightarrow f_{\xi\xi}^* \leq \frac{1}{\theta} I \quad (2.24)$$

Lemma 2.9. Se f è di classe $C^2(\Omega)$ ⁷, $f_{xx} > 0$ in un dominio convesso Ω , allora la sua trasformata di Legendre f^* è data da

$$f^*(\xi) = \max_{x \in \Omega} \{\xi \cdot x - f(x)\} \quad (2.25)$$

per ogni $\xi \in \Omega^*$.

⁷la condizione 's ≥ 2 ' è necessaria per invocare le ipotesi del lemma (2.1) che garantisce l'*invertibilità locale* della mappa gradiente

Dimostrazione. Fissiamo un $\xi \in \Omega^*$ e consideriamo la funzione strettamente concava $g \in C^2(\Omega)$ definita dalla $g(x) = \xi \cdot x - f(x)$. Otteniamo il massimo di g in corrispondenza di quel valore di x tale che $g(x)_x = \xi - f_x(x) = 0$, cioè solo quando tra x e ξ sussiste la relazione $\xi = f_x(x)$. Infine con la formula di Taylor mostriamo che in corrispondenza di tale x la funzione $g(x)$ ha un massimo. Posto $z = x + h \in \Omega$ allora esiste un $\theta \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} g(x+h) &= g(x) + g_x(x)h + \frac{1}{2}h \cdot g_{xx}(x + \theta h)h \\ &= g(x) + 0 - \frac{1}{2}h \cdot f_{xx}(x + \theta h)h, \end{aligned}$$

dunque $g(z) \leq g(x) \quad \forall z \in \Omega$, e $f^*(\xi) \equiv g(x)$ □

Osservazione 2.10. Notiamo subito che è possibile applicare due volte la definizione (2.22) ad una funzione che rispetti le ipotesi dei Lemmi 2.9 e 2.1.

Infatti:

$$f^{**}(x) = [\xi \cdot x - f^*(\xi)] = [\xi \cdot f_\xi^*(\xi) - f^*(\xi)] \Big|_{\xi=\psi(x)}$$

$$f^*(\xi) = [x \cdot \xi - f(x)] = [x \cdot f_x(x) - f(x)] \Big|_{x=\psi(\xi)=\varphi^{-1}}$$

e ricordando che $\psi(\xi) = f_\xi^*(\xi) = f_x^{-1}(\xi)$ si ha che: $f^{**}(x) = \varphi(x) \cdot f_\xi^*(\varphi(x)) - [x \cdot f_x(x) + f(x)] = \varphi(x) \cdot \psi(\varphi(x)) - x \cdot f_x(x) + f(x) = \varphi \cdot x - x \cdot \varphi + f(x)$. Dunque la *trasformata di Legendre* definita in (2.22) è *involutoria* nell'insieme

$$\mathcal{J}_{scC^2} := \{f \in C^2 : f_{xx} > 0\}^8. \quad (2.26)$$

Osservazione 2.11. Possiamo notare inoltre che la definizione di *trasformata di Legendre* per funzioni C^2 può essere indebolita sostituendo il *max* con il *sup*, dato che i due elementi coincidono quando si vuole applicare la seconda definizione a funzioni, almeno *continue* su insiemi convessi e chiusi, *convesse*, ma *non necessariamente* C^2 .

⁸quindi strettamente convesse.

Per completezza riportiamo la definizione di una funzione, la *polare*, che generalizza la Trasformata di Legendre, ed alcune proprietà che la riguardano senza entrare però nel dettaglio delle dimostrazioni.

Definizione 2.5 (Funzione Polare). Sia $(\mathbb{R}^n)^*$ lo spazio ‘duale topologico’ di \mathbb{R}^n ossia l’insieme di tutti i funzionali lineari e continui su \mathbb{R}^n . Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, definiamo $f^* : (\mathbb{R}^n)^* \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ e $x^* \in (\mathbb{R}^n)^*$ la *funzione polare* associata ad f come:

$$f^*(x^*) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x^*, x \rangle - f(x)\}. \quad (2.27)$$

Lemma 2.12. Sia $(\mathbb{R}^n)^*$ lo spazio duale topologico di \mathbb{R}^n , sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, ed $f^* : (\mathbb{R}^n)^* \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ la funzione polare associata ad essa: allora l’operatore $(\cdot)^*$ è involutorio sull’insieme delle funzioni convesse.

Osservazione 2.13. Possiamo osservare che per una funzione convessa e differenziabile essendo anche semicontinua inferiormente la sua polare apparterrà all’insieme \mathcal{J} ma non sarà necessariamente differenziabile .

Definizione 2.6. Un funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ è detta *coercitiva* se

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{|x|} = +\infty \quad (2.28)$$

Teorema 2.14. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ convessa, differenziabile e coercitiva. Sia $x^* \in (\mathbb{R}^n)^*$, allora la polare associata alla funzione f assume la forma della trasformata di Legendre classica ossia:

$$f^*(x^*) = \langle x^*, x \rangle - f(x) \quad (2.29)$$

dove x risolve $df(x) = x^*$.

Dimostrazione. Fissiamo $x^* \in (\mathbb{R}^n)^*$. Per definizione

$$f^*(x^*) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x^*, x \rangle - f(x)\}. \text{ Consideriamo il } \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x) - \langle x^*, x \rangle\}$$

esso esiste perchè $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x) - \langle x^*, x \rangle}{|x|} = +\infty$. Dunque esisterà un punto x di minimo (non nec. unico) di $f - \langle x^*, \cdot \rangle$ ed il differenziale di $f - \langle x^*, \cdot \rangle$ in tale punto dovrà essere nullo. Quindi dalla relazione $df(x) - x^* = 0$ si ha la tesi del teorema: $f^*(x) = \langle x^*, x \rangle - f(x)$ dove x risolve $df(x) = x^*$. \square

Nella prossima sezione, isoleremo un insieme più ampio di J_{scC^2} in cui la trasformata resterà involutoria, ponendo le basi per discutere il dualismo tra Lagrangiana ed Hamiltoniana. Inoltre, scegliere una Lagrangiana appartenente a tale sottoinsieme ci consentirà di riconoscere l'equivalenza tra la formula di Hopf-Lax ed un secondo problema di calcolo delle variazioni.

2.4 Dualismo

Ispirati da quanto detto nella sessione precedente consideriamo uno spazio più ampio di quello delle funzioni $\{C^2, \textit{strettamente convesse}\}$, ossia quello:

$$\mathcal{J} := \left\{ f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{ convessa, } \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{|x|} = +\infty \right\} \quad (2.30)$$

e questa definizione di *Trasformata di Legendre*:

$$f^*(\xi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \xi \cdot x - f(x) \} \quad (2.31)$$

che certamente risulta consistente con quanto già asserito nell'ambito dell'insieme \mathcal{J} dato che funzioni convesse sono continue sugli aperti e dunque il 'sup' coincide con il 'max'. Applicando la suddetta definizione ad una *Lagrangiana* $L = L(q)$ appartenente ad \mathcal{J} , otteniamo che esiste un q^* tale che $L^*(p) = p \cdot q^* - L(q^*)$, e supponendo che la mappa $p = D_q L(q)$ sia *globalmente invertibile* rispetto a q^* con $q^* = q(p)$ si vede che :

$$L^*(p) = p \cdot q(p) - L(q(p))$$

e dunque in base alla definizione di Hamiltoniana riconosciamo che

$$L^*(p) \equiv H(p) . \quad (2.32)$$

Nel prossimo teorema mostreremo che nell'ambito dell' insieme \mathcal{J} è vero anche l'inverso.

Teorema 2.15. *Siano L una Lagrangiana appartenente ad \mathcal{J} definito da (2.30), H Hamiltoniana definita da (2.18). Allora anche H appartiene a \mathcal{J} , e $L = H^*$.*

Dimostrazione. 1. Fissiamo $q \in \mathbb{R}^n$. La funzione $p \rightarrow p \cdot q - L(q)$ è lineare dunque la mappa $p \rightarrow H(p) = L^* = \sup_{q \in \mathbb{R}^n} \{p \cdot q - L(q)\}$ è convessa. Infatti, se $\tau \in [0, 1]$, $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$, allora:

$$\begin{aligned} H(\tau p_1 + (1 - \tau)p_2) &= \sup_{q \in \mathbb{R}^n} \{(\tau p_1 + (1 - \tau)p_2) \cdot q - L(q)\} \\ &\leq \tau \sup_{q \in \mathbb{R}^n} \{p_1 \cdot q - L(q)\} + (1 - \tau) \sup_{q \in \mathbb{R}^n} \{p_2 \cdot q - L(q)\} = \\ &= \tau H(p_1) + (1 - \tau)H(p_2). \end{aligned}$$

2. Fissiamo $\lambda > 0$ qualsiasi, $p \neq 0$. Allora

$$\begin{aligned} H(p) &= \sup_{q \in \mathbb{R}^n} \{p \cdot q - L(q)\} \geq \lambda|p| - L\left(\lambda \frac{p}{|p|}\right) \\ &\geq \lambda|p| - \max_{B(0, \lambda)} L. \end{aligned}$$

⁹ Dato che il $\liminf_{|p| \rightarrow \infty} \frac{H(p)}{|p|} \geq \frac{\lambda}{|p|} - \frac{\max_{B(0, \lambda)} L}{|p|} = \lambda$ per ogni $\lambda > 0$ allora H è *superlineare*.

3. Per definizione di trasformata di Legendre $H(p) + L(q) = L^*(p) + L(q) \geq p \cdot q$ per ogni p e q in \mathbb{R}^n , dunque $L(q) \geq \sup_{p \in \mathbb{R}^n} \{p \cdot q - H(p)\} =$

⁹dove abbiamo imposto $q = \lambda \frac{p}{|p|}$

$H^*(q)$. Per la convessità della funzione L vale la seguente relazione $L(x) \geq L(y) + s \cdot (y - x)$ per ogni x, y in \mathbb{R}^n .

$$\begin{aligned} H^*(q) &= \sup_{p \in \mathbb{R}^n} \{p \cdot q - H(p)\} = \sup_{p \in \mathbb{R}^n} \left\{ p \cdot q - \sup_{r \in \mathbb{R}^n} \{p \cdot r - L(r)\} \right\} = \\ &= \sup_{p \in \mathbb{R}^n} \inf_{r \in \mathbb{R}^n} \{p \cdot (q - r) + L(r)\} \\ &\geq \sup_{p \in \mathbb{R}^n} \inf_{r \in \mathbb{R}^n} \{p \cdot (q - r) - s \cdot (q - r) + L(q)\} \\ &\geq \sup_{p \in \mathbb{R}^n} \inf_{r \in \mathbb{R}^n} \{(p - s) \cdot (q - r)\} + L(q) \end{aligned}$$

Prendendo $s = p$ si ottiene la disuguaglianza opposta. In particolare se L è differenziabile $p = s = DL(q)$.

□

2.5 Secondo problema di calcolo delle variazioni

In questa sezione studieremo un nuovo problema di calcolo delle variazioni omettendo per semplicità la dipendenza dalla variabile x . Il nuovo funzionale d'azione terrà conto dell'informazione al bordo $g(x)$ (supposta per ora *continua*) e, la sua Lagrangiana, come già detto, non conterrà dipendenza esplicita dalla variabile spaziale. Esso si presenta così:

$$u(x, t) := \inf_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \int_0^t L(\dot{\mathbf{w}}(s)) ds + g(y), g \text{ continua, } \mathbf{w}(0) = y, \mathbf{w}(t) = x \right\} \quad (2.33)$$

Osserviamo innanzitutto che tale problema si presenta come quello della ricerca di *geodetiche* e che la sola condizione necessaria e per la definizione della (2.33) è che $L \in L^1_{loc}$ e $\mathbf{w} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Ricordiamo la definizione di funzione lipschitziana:

Definizione 2.7. Una funzione $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice lipschitziana se esiste una costante $L > 0$ tale che:

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.34)$$

La piu piccola delle costanti per cui è vera la (2.34) è denotata con $\mathbf{Lip}(g)$.

$$\mathbf{Lip}(g) := \inf_{L>0} \left\{ \sup_{x,y \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|} \right\} \leq L \right\}, \quad (2.35)$$

Definizione 2.8 (Formula di Hopf-Lax). Sia $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che:

- (i) $L \in \mathcal{J} := \left\{ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{Convessa}, \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{|x|} = +\infty \right\}$
- (ii) g lipschitziana

Sia $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, allora è ben definita (e continua) la funzione

$$f(x, t) := \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ tL \left(\frac{x - y}{t} \right) + g(y) \right\}. \quad (2.37)$$

L'espressione di destra è chiamata *formula di Hopf-Lax*.

Si può mostrare che se la Lagrangiana appartiene all'insieme \mathcal{J} ed il dato al bordo è lipschitziano in \mathbb{R}^n allora per ogni $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$, la funzione u definita dalla (2.33) coincide con la funzione f definita dalla (2.37).

Tali affermazioni sono riassunte nel seguente teorema.

Teorema 2.16. *Sia $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che L appartenga all'insieme \mathcal{J} , ed inoltre che g sia lipschitziana. Allora:*

$$f(x, t) \equiv u(x, t) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty).$$

Dimostrazione. Pur non riportando qui la dimostrazione per intero ricordiamo i passi fondamentali: (1) si mostra l'equivalenza delle relazioni tra gli estremi inferiori facendo vedere che fissati (x, t) la (2.33) è maggiorata dalla

relazione (2.37) con un' opportuna scelta di $w \in \mathcal{A}$ cioè $w(s) = y + \frac{s}{t}(x - y)$;
 (2) viceversa sfruttando l' ipotesi di convessità ed usando la disuguaglianza di Jensen¹⁰ si ottiene la disuguaglianza opposta. (3) Infine la seconda relazione con l'estremo inferiore è equivalente alla (2.37) perchè all'infinito la Lagrangiana superlineare domina sulla funzione g dunque la funzione $\phi(y) := tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y)$ ammette estremo inferiore in un insieme limitato ($\subseteq B_{(0,r)}$), ed infine essendo la funzione ϕ continua (dato che L e g lo sono) tale estremo è realizzato per qualche valore di $y^* \in \bar{B}_{(0,r)}$. \square

Osservazione 2.17. Notiamo che la tesi del precedente teorema vale ancora se sostituiamo le ipotesi di *superlinearità* della funzione L , e di lipschitzianità della g con la condizione: $\lim_{|q| \rightarrow +\infty} \frac{L(q)}{|g(q)|} = +\infty$ insieme alla *continuità* della funzione g .

Riassumiamo tali conclusioni nel prossimo teorema in cui, dopo aver dato una definizione più debole di formula di Hopf-Lax si ottiene l'equivalenza tra quest' ultima e la definizione (2.33).

Teorema 2.18. *Sia $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Siano:*

- (i) L convessa.
 - (ii) g continua.
 - (iii) $\lim_{|q| \rightarrow +\infty} \frac{L(q)}{|g(q)|} = +\infty$
- (2.38)

Definiamo formula di Hopf-Lax (debole) la seguente relazione:

$$f_d(x, t) := \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right\}. \quad (2.39)$$

Allora :

$$f_d(x, t) \equiv u(x, t) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty),$$

dove u è data dalla (2.33).

¹⁰Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa, $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto, limitato, convesso. Sia $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ sommabile. Allora $f\left(\frac{1}{|U|} \int_U u \, dx\right) \leq \frac{1}{|U|} \int_U f(u) \, dx$.

Dimostrazione. La tesi segue dalla continuità della funzione $tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y)$ e dal teorema 2.16. \square

E' necessario ora esibire due lemmi che aiutino a comprendere alcune proprietà della formula di Hopf-Lax (2.37). Il primo mostra che la formula di Hopf-Lax ammette una variante ricorsiva, il secondo la lipschitzianità della funzione $f_d(x, t)$ nell'ipotesi che il dato g lo sia.

Lemma 2.19 (Formula di Hopf-Lax ricorsiva). *Nelle stesse ipotesi del teorema (2.18) risulta ben definita per ogni s tale che $0 \leq s < t$, $x \in \mathbb{R}^n$ la formula seguente:*

$$f_{rd}(x, t) := \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ (t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + f_d(y, s) \right\}. \quad (2.40)$$

che chiameremo 'di Hopf-Lax ricorsiva'.

(T1) Affermiamo che :

$$f_{rd}(x, t) \equiv f_d(x, t) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty). \quad (2.41)$$

dove $f_d(x, t)$ è definita dalla (2.39).

(T2) Se inoltre la funzione g è continua allora risulta ben definita per ogni s tale che $0 \leq s < t$, $x \in \mathbb{R}^n$ la formula seguente:

$$f_r(x, t) := \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ (t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + f_d(y, s) \right\}. \quad (2.42)$$

ed

$$f(x, t) \equiv f_r(x, t) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty). \quad (2.43)$$

Dimostrazione. (T1) Fissiamo $y \in \mathbb{R}^n$, $0 < s < t$. Ricordiamo che per definizione di estremo inferiore : se $\alpha := \inf_{a \in A} a$ allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste un certo a_ϵ tale che $\alpha + \epsilon \geq a_\epsilon$. Dunque dalla (2.39) fissato ϵ otteniamo che esiste z_ϵ tale che $f_{rd}(y, t) + \epsilon \geq tL\left(\frac{y-z_\epsilon}{t}\right) + g(z_\epsilon)$. Inoltre ponendo $\frac{x-z_\epsilon}{t} =$

$(1 - \frac{s}{t}) \frac{x-y}{t-s} + \frac{s}{t} \frac{y-z_\epsilon}{s}$, e sfruttando la convessità della funzione L otteniamo che $L\left(\frac{x-z_\epsilon}{t}\right) \leq (1 - \frac{s}{t}) L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + \frac{s}{t} L\left(\frac{y-z_\epsilon}{s}\right)$. Dunque

$$\begin{aligned} f_d(x, t) &\leq tL\left(\frac{x-z_\epsilon}{s}\right) + g(z_\epsilon) \leq \\ &\leq t\left(1 - \frac{s}{t}\right) L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + t\frac{s}{t} L\left(\frac{y-z_\epsilon}{s}\right) + g(z_\epsilon) \end{aligned}$$

sottraendo ϵ ad ambo i membri :

$$\begin{aligned} f_d(x, t) - \epsilon &\leq (t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + sL\left(\frac{y-z_\epsilon}{s}\right) + g(z_\epsilon) - \epsilon \\ &\leq (t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + f_d(y, s) \end{aligned}$$

ed otteniamo:

$$f_d(x, t) - \epsilon \leq \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ (t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + f_d(y, s) \right\} = f_{rd}(x, t). \quad (2.44)$$

Per trovare la disuguaglianza opposta fissiamo, x , $0 < s < t$, ed $\epsilon > 0$. Allora esiste w_ϵ tale che $tL\left(\frac{x-w_\epsilon}{t}\right) + g(w_\epsilon) \leq f_d(x, t) + \epsilon$. Scegliamo $y = \frac{s}{t}x + (1 - \frac{s}{t})w_\epsilon$ segue che $\frac{x-y}{t-s} = \frac{x-w_\epsilon}{t} = \frac{y-w_\epsilon}{s}$

$$\begin{aligned} f_{rd}(x, t) &\leq (t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + f_d(y, s) \leq \\ &(t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + sL\left(\frac{y-w_\epsilon}{s}\right) + g(w_\epsilon) = \\ &= (t-s)L\left(\frac{x-w_\epsilon}{t}\right) + sL\left(\frac{x-w_\epsilon}{t}\right) + g(w_\epsilon) = \\ &= tL\left(\frac{x-w_\epsilon}{t}\right) + g(w_\epsilon) \leq f_d(x, t) + \epsilon \end{aligned}$$

ed otteniamo :

$$f_{rd}(x, t) \leq f_d(x, t) + \epsilon. \quad (2.45)$$

Unendo le (2.44) e (2.45) segue che :

$$f_d(x, t) - \epsilon \leq f_{rd}(x, t) \leq f_d(x, t) + \epsilon \quad \text{ossia} \quad |f_{rd}(x, t) - f_d(x, t)| \leq \epsilon \quad (2.46)$$

e per arbitrarietà di $\epsilon > 0$ segue la tesi.

(T2) Ricordando il teorema (2.16) e l'osservazione (2.17) la tesi discende direttamente dal risultato (T1). \square

Lemma 2.20 (Lipschitzianità della formula di Hopf-Lax). *Sia $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Siano inoltre soddisfatte le ipotesi del teorema (2.18). Se infine la funzione g è lipschitziana in $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$ allora la funzione f definita in (2.37) (o equivalentemente u definita dalla (2.33)) è lipschitziana in $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$.*

Dimostrazione. Fissiamo $(t > 0), x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$. Per continuità della funzione $f(x, t)$ in $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ possiamo scegliere $y \in \mathbb{R}^n$ tale che: $tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) = f(x, t)$. Allora

$$\begin{aligned} f(\hat{x}, t) - f(x, t) &= \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ tL\left(\frac{\hat{x} - z}{t}\right) + g(z) \right\} - tL\left(\frac{x - y}{t}\right) + g(y) = \\ &= tL\left(\frac{\hat{x} - z}{t}\right) + g(z) - tL\left(\frac{x - y}{t}\right) - g(y) \leq \quad \forall y \in \mathbb{R}^n =^{11} \\ &= g(\hat{x} - x + y) - g(y) \leq \mathbf{Lip}(g)|\hat{x} - x|. \end{aligned}$$

Scambiando il ruolo di \hat{x} ed x e ripetendo il precedente ragionamento otteniamo la lipschitzianità di f rispetto alla variabile x cioè:

$$|f(\hat{x}, t) - f(x, t)| \leq \mathbf{Lip}(g)|\hat{x} - x|. \quad (2.47)$$

Ora fissiamo $(t > 0), x \in \mathbb{R}^n$. Scegliendo $y = x$ nella (2.37) otteniamo:

$$f(x, t) \leq L(0) + g(x). \quad (2.48)$$

¹¹scegliendo z in modo da rendere uguali $\hat{x} - z$ ed $x - y$.

Inoltre

$$\begin{aligned}
f(x, t) &= \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ tL \left(\frac{x-y}{t} \right) + g(y) \right\} \geq \\
&\stackrel{12}{\geq} g(x) + \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ -\mathbf{Lip}(g)|x-y| + tL \left(\frac{x-y}{t} \right) \right\} = \\
&= g(x) - t \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ \mathbf{Lip}(g) \frac{|x-y|}{t} - tL \left(\frac{x-y}{t} \right) \right\} = \\
&= g(x) - t \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{ \mathbf{Lip}(g)|z| - tL(z) \} = \\
&\stackrel{13}{=} g(x) - t \sup_{w \in B(0, \mathbf{Lip}(g))} \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \{ w \cdot z - tL(z) \} = \\
&= g(x) - t \sup_{w \in B(0, \mathbf{Lip}(g))} H(w).
\end{aligned}$$

Quest' ultima uguaglianza e la (2.48) implicano:

$$|f(x, t) - g(x)| \leq \max \left(|L(0)|, \sup_{w \in B(0, \mathbf{Lip}(g))} |H(w)| \right). \quad (2.49)$$

Infine fissando $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < \hat{t} < t$ e sfruttando la formulazione ricorsiva (2.18) possiamo ripetere il ragionamento eseguito per trovare le (2.48) ed (2.49) ottenendo: $f(x, t) - f(x, \hat{t}) \leq L(0)$, ed $f(x, t) - f(x, \hat{t}) \geq t \sup_{w \in B(0, \mathbf{Lip}(g))} |H(w)|$ e dunque la tesi:

$$|f(x, t) - f(x, \hat{t})| \leq \max \left(|L(0)|, \sup_{w \in B(0, \mathbf{Lip}(g))} |H(w)| \right) |t - \hat{t}|.$$

□

¹²dato che $-\mathbf{Lip}(g)|x-y| + g(x) \leq g(y) \leq g(x) + \mathbf{Lip}(g)|x-y|$.

¹³dato che $\sup_{a \in \mathbb{R}^+} \{ w \cdot a \frac{w}{|w|} - tL(a \frac{w}{|w|}) \}$

2.6 Lax-soluzione delle equazioni di Hamilton-Jacobi

La formula di Hopf-Lax risolve direttamente il problema con dato iniziale (2.1) nei punti in cui è differenziabile come possiamo notare dal seguente teorema.

Teorema 2.21. *Sia $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione appartenente all'insieme \mathcal{J} ¹⁴.*

Sia $g \in \mathbf{Lip}(\mathbb{R}^n)$. Supponiamo che:

- (a) $u(x, t) := \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right\}$
 $\forall x \in \mathbb{R}^n, t > 0$, come da (2.37),
- (b) u differenziabile nel punto (\bar{x}, \bar{t})

Allora u risolve (2.1) in (\bar{x}, \bar{t}) , cioè: $u_t(\bar{x}, \bar{t}) + H(Du(\bar{x}, \bar{t})) = 0$.

Dimostrazione. Preso $h > 0$ e $q \in \mathbb{R}^n$, si ha che:

$$\begin{aligned} u(\bar{x} + hq, \bar{t} + h) &= \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ (\bar{t} + h - \bar{t})L\left(\frac{\bar{x} + hq - y}{\bar{t} + h - \bar{t}}\right) + u(y, \bar{t}) \right\} \\ &= \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ hL\left(\frac{\bar{x} + hq - y}{h}\right) + u(y, \bar{t}) \right\} \\ &\leq hL\left(\frac{\bar{x} + hq - y}{h}\right) + u(y, \bar{t}), \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad 15 \\ &= hL(q) + u(\bar{x}, \bar{t}). \end{aligned}$$

Pertanto

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(\bar{x} + hq, \bar{t} + h) - u(\bar{x}, \bar{t})}{h} \leq L(q)$$

e dunque

$$u_t(\bar{x}, \bar{t}) + D_x u(\bar{x}, \bar{t}) \cdot q - L(q) \leq 0 \quad \forall q \in \mathbb{R}^n$$

$$u_t(\bar{x}, \bar{t}) + \max_{q \in \mathbb{R}^n} \{ D_x u(\bar{x}, \bar{t}) \cdot q - L(q) \} \leq 0.$$

¹⁴definito in (2.30)

¹⁵imponendo $y = \bar{x}$.

Se ne deduce che

$$u_t(\bar{x}, \bar{t}) + H(Du(\bar{x}, \bar{t})) \leq 0. \quad (2.50)$$

Per trovare la disuguaglianza opposta fissiamo $h > 0$. Dato che $u(\bar{x}, \bar{t}) := \min_{y \in \mathbb{R}^n} \{tL\left(\frac{\bar{x}-y}{t}\right) + g(y)\}$ esisterà $z \in \mathbb{R}^n$ tale che $u(\bar{x}, \bar{t}) = tL\left(\frac{\bar{x}-z}{t}\right) + g(z)$ quindi si ha

$$\begin{aligned} u(\bar{x}, \bar{t}) - u(y, \bar{t}) &= tL\left(\frac{\bar{x}-z}{t}\right) + g(z) - \min_{z \in \mathbb{R}^n} \left\{ \bar{t}L\left(\frac{y-z}{\bar{t}}\right) + g(z) \right\} \geq \\ &\geq \bar{t}L\left(\frac{\bar{x}-z}{\bar{t}}\right) + g(z) - \bar{t}L\left(\frac{y-z}{\bar{t}}\right) - g(z) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Scegliamo $y = \frac{s}{\bar{t}}\bar{x} + (1 - \frac{s}{\bar{t}})z$ dunque $\frac{\bar{x}-z}{\bar{t}} = \frac{y-z}{s}$ ed $s = \bar{t} - h$ ottenendo,

$$\begin{aligned} u(\bar{x}, \bar{t}) - u\left(\left(1 - \frac{h}{\bar{t}}\right)\bar{x} + \frac{h}{\bar{t}}z, \bar{t} - h\right) &= \\ &= u(\bar{x}, \bar{t}) - u\left(\bar{x} - h\frac{\bar{x}-z}{\bar{t}}, \bar{t} - h\right) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(\bar{x}, \bar{t}) - u\left(\bar{x} - h\frac{\bar{x}-z}{\bar{t}}, \bar{t} - h\right)}{h} &= \\ u_t(\bar{x}, \bar{t}) + \frac{\bar{x}-z}{\bar{t}} \cdot Du(\bar{x}, \bar{t}) &\geq L\left(\frac{\bar{x}-z}{\bar{t}}\right) \quad \forall z \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Dunque portando a sinistra il membro destro, ponendo $q = \frac{\bar{x}-z}{\bar{t}}$ e ripetendo i passi della che hanno portato alla disuguaglianza opposta si trova:

$$u_t(\bar{x}, \bar{t}) + H(Du(\bar{x}, \bar{t})) \geq 0. \quad (2.51)$$

□

Ricordando il

Teorema 2.22 (di Rademacher). *Una funzione lipschitziana in \mathbb{R}^n è differenziabile quasi ovunque.*

possiamo riassumere i precedenti risultati in un teorema di esistenza e caratterizzazione delle soluzioni del problema (2.1):

Teorema 2.23 (di esistenza della soluzione quasi ovunque). *Il problema (2.1) sotto le ipotesi di lipschitzianità del dato al bordo $g(x)$ ha per soluzione una u ‘differenziabile quasi ovunque’ espressa dalla formula di Hopf-Lax (2.37).*

Infine osserviamo, con il seguente controesempio, che esistono problemi per cui le condizioni del Teorema 2.23 non sono sufficienti per l’unicità.

Esempio 3.

$$\begin{cases} u_t + |u_x|^2 = 0 & \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u = 0 & \mathbb{R} \times (t = 0) \end{cases} \quad (2.52)$$

Possiamo facilmente notare che il problema ammette le due seguenti soluzioni:

$$u_1(x, t) = 0 \quad u_2(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \geq t \\ x - t & \text{se } 0 \leq x \leq t \\ -x - t & \text{se } -t \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Infatti la u_2 ha differenziale discontinuo sulle rette $x - t = 0$ e $-x - t = 0$ che sono insiemi di misura nulla in \mathbb{R}^2 .

Questa osservazione, suggerisce che per avere unicità della soluzione H-J, bisogna restringere l’insieme di ammissibilità della soluzione. Tali restrizioni saranno oggetto della prossima sezione.

2.7 Soluzioni lipschitziane semiconcave

Le prossime definizioni sono volte a dare una stima della derivata seconda della soluzione del problema (2.1)

Definizione 2.9 (Semiconcavit ). Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice semiconcava in \mathbb{R}^n se $\forall x, z \in \mathbb{R}^n$ esiste una costante $C > 0$ tale che :

$$f(x+z) - 2f(x) + f(x-z) \leq C|z|^2. \quad (2.53)$$

Intuitivamente possiamo pensare che una funzione *semiconcava* si ottenga dalla somma di una funzione *concava* con una funzione C^2 -limitata¹⁶. Inoltre per una funzione *semiconcava* in ogni intorno esiste sempre un paraboloide tangente che si trova *localmente sopra* il grafico della funzione, ma non necessariamente altrettanti che si trovino *localmente sotto* (a meno che la funzione non sia anche C^2). La costante C esprime il massimo valore assumibile dal coefficiente di secondo grado del paraboloide tangente.

Osservazione 2.24. Potrebbe accadere che lo studio di un certo problema fisico sia descrivibile per mezzo di una data equazione di Hamilton-Jacobi, e che in certe circostanze sempre fisicamente motivabili, sia possibile trascurare la semiconcavit  della soluzione aspettata e del dato al bordo. Allora potrebbe essere utile definire un operatore che trasformi il dato al bordo continuo in uno semiconcavo. Anticipando il risultato (che vedremo pi  avanti) secondo il quale: l'esistenza di un dato semiconcavo possa produrre una soluzione unica del problema H-J, poniamo la definizione dell'operatore cercato, *l'operatore di inf-convoluzione*¹⁷.

¹⁶per dettagli vedere [4, Proposition 1.1.3]

¹⁷noto anche sotto il nome di *regolarizzazione di Yosida* in teoria dei semigrupperi, e di *regolarizzazione di Moreau* in ottimizzazione

Definizione 2.10 (Inf-convoluzione). Sia $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione data, $t > 0$. La sua 'inf-convoluzione' (di parametro di scala t) è la funzione $g_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definita da:

$$g_t(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ g(y) + \frac{|x - y|^2}{2t} \right\}. \quad (2.54)$$

Alcune sue proprietà sono:

1. $g_t(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$;
2. $g_t(x) \uparrow g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, per $t \rightarrow 0^+$;
3. $g_t(x)$ è monotona crescente in t ;
4. se g è continua allora la convergenza $g_t \uparrow g$ è *uniforme sui compatti* di \mathbb{R}^n (perchè monotonia puntuale e continuità implicano sempre convergenza uniforme sui compatti);
5. vale la seguente stima di semiconcavità:

$$g_t(x + z) - 2g_t(x) + g_t(x - z) \leq \frac{1}{t}|z|^2 \quad \forall x, z \in \mathbb{R}^n, t > 0. \quad (2.55)$$

Lemma 2.25 (soluzione semiconcava di problema con dato semiconcavo).
Sia g semiconcava in \mathbb{R}^n di costante C_g . Allora la funzione u definita da (2.37) è semiconcava di costante C_g , cioè

$$u(x + z, t) - 2u(x, t) + u(x - z, t) \leq C_g|z|^2$$

Dimostrazione. Siano $x \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$. Ricordando che

$$u(x, t) := \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right\}, \text{ esisterà } y \in \mathbb{R}^n \text{ tale che: } u(x, t) = tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y).$$

$$\text{Inoltre } u(x - z, t) = \min_{\eta \in \mathbb{R}^n} \left\{ tL\left(\frac{x-z-\eta}{t}\right) + g(\eta) \right\} \leq tL\left(\frac{x-z-\eta}{t}\right) + g(\eta),$$

$u(x+z, t) = \min_{\mu \in \mathbb{R}^n} \{tL\left(\frac{x+z-\mu}{t}\right) + g(\mu)\} \leq tL\left(\frac{x+z-\mu}{t}\right) + g(\mu)$. Allora ponendo $\eta = y - z$ e $\mu = y + z$

$$\begin{aligned} u(x+z, t) - 2u(x, t) + u(x-z, t) &\leq \\ &\leq tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y-z) - 2[tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + \\ &+ g(y)] + tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y+z) = \\ &= g(y+z) - 2g(y) + g(y-z) \leq C_g|z|^2. \end{aligned} \quad (2.56)$$

□

Questa proprietà può essere trovata anche a partire da ipotesi sull'Hamiltoniana anzichè sul dato al bordo sfruttando la definizione di *uniforme convessità*(2.3).

Lemma 2.26. *Se H è 'uniformemente convessa' (di costante θ) e u definita dalla formula di Hopf-lax allora: u è semiconcava rispetto alla variabile x di costante $\frac{1}{\theta t}$, cioè:*

$$u(x+z, t) - 2u(x, t) + u(x-z, t) \leq \frac{1}{\theta t}|z|^2 \quad \forall x, z \in \mathbb{R}^n \quad (2.57)$$

e per $t > 0$.

Dimostrazione. Ricordando la formula di Lagrange per cui se $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ allora esiste $\tau \in [0, 1]$ tale che $f(x) = T_k(x) + E_k(x)$, con

$$T_k(x) := \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k} f_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}(x_0)(x-x_0)^k$$

$E_k(x) := \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i_1, \dots, i_{k+1}=1}^n f_{x_{i_1} \dots x_{i_{k+1}}}(\tau x_0 + (1-\tau)x)(x-x_0)^{k+1}$ sviluppando H in $\frac{p_1+p_2}{2}$ per $k=1$ otteniamo:

$$\begin{aligned} H(p^1) &= H\left(\frac{p^1+p^2}{2}\right) + \sum_{i=1}^n H_{p_i}\left(\frac{p^1+p^2}{2}\right) \left|\frac{p^1-p^2}{2}\right| + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2=1}^n H_{p_{i_1} p_{i_2}}(\tilde{p}) \left|\frac{p^1-p^2}{2}\right|^2 \end{aligned}$$

$$H(p^1) - H\left(\frac{p^1 + p^2}{2}\right) - \sum_{i=1}^n H_{p_i}\left(\frac{p^1 + p^2}{2}\right) \left|\frac{p^1 - p^2}{2}\right| \geq \theta \left|\frac{p^1 - p^2}{2}\right|^2$$

$$\begin{aligned} H(p^2) &= H\left(\frac{p^1 + p^2}{2}\right) + \sum_{i=1}^n H_{p_i}\left(\frac{p^1 + p^2}{2}\right) \left|\frac{p^2 - p^1}{2}\right| + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2=1}^n H_{p_{i_1 p_{i_2}}}(\tilde{p}) \left|\frac{p^2 - p^1}{2}\right|^2 \end{aligned}$$

$$H(p^2) - H\left(\frac{p^1 + p^2}{2}\right) + \sum_{i=1}^n H_{p_i}\left(\frac{p^1 + p^2}{2}\right) \left|\frac{p^1 - p^2}{2}\right| \geq \theta \left|\frac{p^1 - p^2}{2}\right|^2$$

sottraendo membro a membro si ottiene

$$H\left(\frac{p^1 + p^2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}H(p^1) + \frac{1}{2}H(p^2) - \frac{\theta}{8}|p^1 - p^2|^2. \quad (2.58)$$

Allo stesso modo, ricordando il Teorema (2.1), se $H \in C^2$ allora anche $L \in C^2$ e per l'osservazione (2.24) per cui se $D^2H(p) \geq \theta I$ allora $D^2L(q) \leq \frac{1}{\theta}I$, possiamo ripetere i passaggi precedenti ottenendo:

$$\begin{aligned} L(q^1) &= L\left(\frac{q^1 + q^2}{2}\right) + \sum_{i=1}^n L_{q_i}\left(\frac{q^1 + q^2}{2}\right) \left|\frac{q^1 - q^2}{2}\right| \leq \frac{1}{\theta} \left|\frac{q^1 - q^2}{2}\right|^2 \\ L(q^2) &= L\left(\frac{q^1 + q^2}{2}\right) + \sum_{i=1}^n L_{q_i}\left(\frac{q^1 + q^2}{2}\right) \left|\frac{q^2 - q^1}{2}\right| \leq \frac{1}{\theta} \left|\frac{q^1 - q^2}{2}\right|^2 \\ \frac{1}{2}L(q^1) + \frac{1}{2}L(q^2) &\leq L\left(\frac{q^1 + q^2}{2}\right) + \frac{1}{8\theta}|q^1 - q^2|^2 \end{aligned} \quad (2.59)$$

Infine ragionando come nel Lemma 2.25:

$$\begin{aligned} u(x+z, t) - 2u(x, t) + u(x-z, t) &\leq \\ &\quad \left[tL\left(\frac{x+z-y}{t}\right) + g(y) \right] - 2 \left[tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right] + \\ &\quad + \left[tL\left(\frac{x-z-y}{t}\right) + g(y) \right] \\ &= 2t \left[\frac{1}{2}L\left(\frac{x+z-y}{t}\right) - L\left(\frac{x-y}{t}\right) + \frac{1}{2}L\left(\frac{x-z-y}{t}\right) \right] \leq \\ &\leq 2t \frac{1}{8t} \left| \frac{2z}{t} \right|^2 = \frac{1}{\theta t} |z|^2 \end{aligned} \quad (2.60)$$

□

A questo punto, si rende necessaria la prima definizione di *soluzione debole* del nostro problema (2.1), ossia una definizione che faccia salve tutte le proprietà necessarie per: l'*esistenza* e la *consistenza quasi ovunque* con il suddetto problema, ed in più soddisfi una proprietà che la renda anche *unica*. A questo scopo, proporrò, prima un lemma tecnico, poi un teorema che dimostri l'unicità della soluzione debole e riassumeremo in un secondo teorema, le condizioni sufficienti di esistenza ed unicità della soluzione debole tenendo conto di quanto esposto finora.

Definizione 2.11 (Soluzione debole). Una funzione $u : \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *soluzione debole* per il problema (2.1) se:

- (a) u è lipschitziana,
- (b) $u(x, 0) = g(x)$ per $x \in \mathbb{R}^n$,
- (c) $u_t + H(Du) = 0$ quasi ovunque in $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$,
- (d) $u(x + z, t) - 2u(x, t) + u(x - z, t) \leq C \left(1 + \frac{1}{t}\right) |z|^2$
per qualche costante $C > 0$ e per ogni $x, z \in \mathbb{R}^n$.

Osservazione 2.27. Possiamo subito notare che la costante di semiconcavità associata alla soluzione debole $C \left(1 + \frac{1}{t}\right) = c(t)$ controlla per $t > 0$ la sottomatrice differenziale seconda relativa alla variabile x : $|D_x^2 u| \leq c(t)$. La funzione $c(t)$ tende ad un valore minimo C per t grande, quindi al crescere di t i paraboloidi sopra-tangenti hanno ampiezze sempre maggiori. Al contrario per piccoli valori di t la costante di semiconcavità si *degrada* nel senso che il suo controllo sul differenziale secondo diventa sempre più debole.

Osservazione 2.28. Assieme all'ipotesi di lipschitzianità della funzione g entrambi i criteri dettati dai Lemmi 2.26 e 2.25 sono sufficienti ad affermare

che la soluzione di Hopf-Lax costruita a partire da tali funzioni sarà una *soluzione debole*.

Lemma 2.29 (Limiti superiore della Traccia). *Siano A e B due matrici simmetriche $n \times n$ tali che: esistano due costanti k, Λ tali che $0 \leq a \leq \lambda I$ e $B \leq kI$. Allora $tr(AB) \leq nk\lambda$.*

Dimostrazione. Esprimendo B rispetto alla base in cui appare diagonale e_1, \dots, e_n , definiti μ_1, \dots, μ_n i suoi autovalori ($\langle Be_i, e_i \rangle = \mu_i$) la definizione $B \leq kI$ assume il seguente significato: $\langle Be_i - ke_i, e_i \rangle \leq 0$, quindi $\langle Be_i - ke_i, e_i \rangle \leq 0$, $\langle Be_i - ke_i, e_i \rangle = \langle \mu_i e_i - ke_i, e_i \rangle \leq 0$ e abbiamo $\mu_i \leq k$.

Dunque: $tr(AB) = \sum_i^n \langle AB e_i, e_i \rangle = \sum_i^n \langle B e_i, A e_i \rangle = \sum_i^n \langle \mu_i e_i, A e_i \rangle = \sum_i^n \mu_i \langle e_i, A e_i \rangle \leq \sum_i^n k \langle e_i, e_i \rangle \leq k \sum_i^n \langle e_i, A e_i \rangle \leq k \sum_i^n \Lambda \leq k\Lambda n$. \square

Teorema 2.30 (Unicità della soluzione debole). *Sia $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $H \in \mathcal{J}$ definito dalla (2.30), $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Siano verificate inoltre le seguenti condizioni:*

$$\begin{aligned} (i) \quad & H \in C^2, \\ (ii) \quad & g \text{ lipschitziana. }^{18}, \end{aligned} \tag{2.61}$$

Allora esiste al più una soluzione debole del problema (2.1).

Dimostrazione. Siano per assurdo u^1 e u^2 due *soluzioni deboli* distinte di (2.1) Ponendo $w = u^1 - u^2$, abbiamo $w_t = u_t^1 - u_t^2 = -[H(Du^1) - H(Du^2)] = -\int_{Du^1}^{Du^2} DH(\phi) d\phi = -\int_0^1 D_\phi H(\phi) \frac{d\phi}{dr} dr$ con $\phi(0) = Du^1$, $\phi(1) = Du^2$, $\phi(r) = rDu^1 + (1-r)Du^2$.

Dunque

$$w_t(y, s) = - \underbrace{\int_0^1 DH(rDu^1 + (1-r)Du^2) dr}_{=: b(y, s)} \cdot [Du^1 - Du^2](y, s)$$

¹⁸condizione necessaria per l' esistenza di una soluzione *lipschitziana* nella forma di Hopf-Lax.

$w_t(y, s) - b(y, s) \cdot Dw(y, s) = 0$ quasi ovunque in $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$.

Osserviamo che la relazione precedente è un'equazione *di trasporto lineare a coefficienti non regolari*. Non è dunque immediato affermare che se $w = 0$ sul bordo allora $w \equiv 0$.

Consideriamo una funzione $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ e poniamo $v = \varphi(w)$.

Moltiplicando per $\frac{d\varphi}{dw}$ ¹⁹ otteniamo $\frac{dv}{dw} w_t + \frac{dv}{dw} b \cdot Dw = 0$, cioè

$$v_t + b \cdot Dw = 0 \quad \text{q.o.}$$

A questo punto, mollifichiamo il campo di vettori b e ricaviamo alcune proprietà delle soluzioni deboli regolarizzate $u_\epsilon^1 = \eta_\epsilon * u^1$, $u_\epsilon^2 = \eta_\epsilon * u^2$ ²⁰. Osservando che $|u_\epsilon^i(x) - u_\epsilon^i(\tilde{x})| = \int_{B(0,\epsilon)} \eta(y)(u(x-y) - u(\tilde{x}-y)) dy \leq \int_{B(0,\epsilon)} \eta(y) dr \mathbf{Lip}(u^i)|x - \tilde{x}|$ otteniamo che :

$$|Du_\epsilon^i| \leq \mathbf{Lip}(u^i) \quad \text{per } i = 1, 2.$$

e che per note proprietà dei mollificatori²¹

$$Du_\epsilon^i \rightarrow Du \quad \text{quasi ovunque per } \epsilon \rightarrow 0, i = 1, 2.$$

Inoltre u_ϵ^i soddisfa la condizione di semiconcavità per $\epsilon > 0$ e risulta

$$D^2 u_\epsilon^i \leq C \left(1 + \frac{1}{s} \right).^{22}$$

Ponendo $b_\epsilon(y, s) = \int_0^1 DH(rDu_\epsilon^1 + (1-r)Du_\epsilon^2) dr$, notiamo che: $v_t + \mathbf{div}(vb_\epsilon) = (\mathbf{div}b_\epsilon)v + (b_\epsilon - b) \cdot Dw$ ²³ Posto

$$\Lambda := \sup \{ |D^2 H(p)| : |p| \leq \max \{ \mathbf{Lip}(u^1), \mathbf{Lip}(u^2) \} \} \quad (2.62)$$

¹⁹ $d\varphi(x, t) = \frac{d\varphi}{dw} \frac{dw}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dw} \frac{d\varphi}{dw} \frac{dw}{dt} dt$

²⁰dove η_ϵ è il mollificatore standard $\int_{B(0,\epsilon)} \eta_\epsilon dx = 1$ e

$u_\epsilon(x) = \eta_\epsilon * u = \int_U \eta(x-y)u(y) dy = \int_{B(0,\epsilon)} \eta(y)u(x-y) dy$ con

$U_\epsilon := \{x \in U | \text{dist}(\partial U, x) > \epsilon\}$.

²¹vedi [3]

²²come si può vedere da [4, Proposizione 1.1.3]

²³con $\mathbf{div}(ab) = a\mathbf{div}(b) + Da \cdot b$

$$\begin{aligned}
\mathbf{div}(b) &= \int_0^1 \sum_{i,j=1}^n D_{p_i p_j}^2 H(rDu_\epsilon^1 + (1-r)Du_\epsilon^2) \left[r \frac{d^2 u_\epsilon^1}{dx_i dx_j} + (1-r) \frac{d^2 u_\epsilon^2}{dx_i dx_j} \right] = \\
&= \int_0^1 \operatorname{tr}(D^2 H [rD^2 u^1 + (1-r)D^2 u^2]) dr \leq n\Lambda 2C \left(1 + \frac{1}{t}\right) := \tilde{C} \left(1 + \frac{1}{t}\right).
\end{aligned} \tag{2.63}$$

²⁴ Fissati (t_0, x_0) in $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ introduciamo la seguente funzione:

$$e(t) := \int_{B(x_0, (t_0-t))} v(x, t) dx. \tag{2.64}$$

Siano:

$$\begin{aligned}
R &:= \max \{ |DH(p)| : |p| \leq \max \{ \mathbf{Lip}(u^1), \mathbf{Lip}(u^2) \} \} \\
C &:= \{ (x, t) : 0 \leq t \leq t_0, |x - x_0| \leq R(t_0 - t) \}.
\end{aligned}$$

Possiamo calcolare quasi ovunque per $t > 0$:

$$\begin{aligned}
\dot{e}(t) &= \int_{B(x_0, R(t_0-t))} v_t dx - R \int_{\partial B(x_0, R(t_0-t))} v dx = \\
&= \int_{B(x_0, R(t_0-t))} [-\mathbf{div}(vb_\epsilon) + (\mathbf{div}b_\epsilon)v + (b_\epsilon - b) \cdot Dv] dx + \\
&\quad - R \int_{\partial B(x_0, R(t_0-t))} v dx = \\
&= \int_{B(x_0, R(t_0-t))} [(\mathbf{div}b_\epsilon)v + (b_\epsilon - b) \cdot Dv](x, t) dx + \\
&\quad - \int_{\partial B(x_0, R(t_0-t))} v(b_\epsilon \cdot \nu + R) dx^{25} \\
&\leq \int_{B(x_0, R(t_0-t))} [(\mathbf{div}b_\epsilon)v + (b_\epsilon - b) \cdot Dv](x, t) dx + 0 \\
&\leq \tilde{C} \left(1 + \frac{1}{t}\right) \int_{B(x_0, R(t_0-t))} v + \int_{B(x_0, R(t_0-t))} (b_\epsilon - b) \cdot Dv(x, t) dx
\end{aligned}$$

²⁴in cui abbiamo usato il lemma (2.29) per $A = D^2 H$ e $B = D^2 u_\epsilon^i$, essendo H convessa e C^2 risulta $0 \leq DH$ oltre che $D^2 H \leq \Lambda I$ e $D^2 u_\epsilon^i \leq C \left(1 + \frac{1}{t}\right) I$.

Dove l'ultimo termine del secondo membro tende a zero per $\epsilon \rightarrow 0$, per quasi ogni $t^0 > 0$, per il teorema di *convergenza dominata*.

$$\dot{e}(t) \leq \tilde{C} \left(1 + \frac{1}{t}\right) \int_{B(x^0, R(t_0-t))} v \leq \tilde{C} \left(1 + \frac{1}{t}\right) e(t). \quad (2.65)$$

Definiamo la funzione

$$\varphi(z) : \begin{cases} 0 & \text{se } |z| \leq \epsilon[\mathbf{Lip}(u^1) + \mathbf{Lip}(u^2)] \\ > 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dato che $w(x, 0) = u^2(x, 0) - u^1(x, 0) = g(x) - g(x) = 0$ allora $v(x, 0) = \varphi(w(x, 0)) = 0$, inoltre dato che $|u^1(x, \epsilon) - u^2(x, \epsilon)| \leq |u^1(x, \epsilon) - u^1(x, 0)| + |u^1(x, 0) - u^2(x, 0)| + |u^2(x, 0) - u^2(x, \epsilon)| \leq \epsilon[\mathbf{Lip}(u^1) + \mathbf{Lip}(u^2)]$

$$e(\epsilon) = \int_{B(x_0, R(t_0-\epsilon))} v(x, \epsilon) dx = 0$$

Applicando il *lemma di Gronwall* alla relazione (2.65) si ha

$$e(t) \leq e(\epsilon) e^{\int_{\epsilon}^t \tilde{C}(1+\frac{1}{s}) ds} \quad \forall 0 < \epsilon < r < t_0$$

quindi $e(r) = 0 \forall 0 < r < t_0$.

Per definizione di φ dalla seguente relazione

$$e(r) = \int_{B(x_0, R(t_0-r))} \varphi(w(x, r)) dx = 0$$

si deduce necessariamente che

$$|w(x, t)| = |u^2(x, t) - u^1(x, t)| \leq \epsilon[\mathbf{Lip}(u^1) + \mathbf{Lip}(u^2)] \quad \forall (x, t) \in B(x_0, R(t_0-r)).$$

Infine possiamo rendere piccola a piacere la distanza tra u^1 ed u^2 e per continuità di u^1 ed u^2 al limite per $\epsilon \rightarrow 0$ otteniamo $u^1(x_0, t_0) = u^2(x_0, t_0)$. Infine per l'arbitrarietà di (x_0, t_0) si ha che la tesi è valida per ogni $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$. \square

²⁵ $0 \leq b_\epsilon \cdot \nu + R \leq 2R$

Osservazione 2.31. Possiamo concludere questo capitolo affermando che: se $g \in Lip$, $H \in C^2$, *convessa* e *superlineare* ed inoltre è verificata una delle seguenti affermazioni: 1) H è *uniformemente convessa*; 2) g è *semiconcava* allora esiste un'unica *soluzione debole* del problema (2.1) ed è la formula di Hopf-Lax(2.37). A riprova di quanto appena detto possiamo citare un caso in cui la formula di Hopf-Lax produca una soluzione non differenziabile ovunque anche se costruita a partire da L (di conseguenza anche H) e g molto regolari.

Esempio 4. Consideriamo il caso in cui $L(q) = \frac{q^2}{2}$ (dunque C^∞ , strettamente convessa, e superlineare), e g così definita

$$g(x) := \begin{cases} -|x|^2, & \text{se } |x| < 1 \\ 1 - 2|x|, & \text{se } |x| > 1, \end{cases} \quad (2.66)$$

dunque strettamente concava, lipschitziana, C^1 ma non C^2 .

La formula di Hopf-Lax relativa a questo problema porta alla soluzione:

$$f(x, t) := \begin{cases} \frac{-|x|^2}{1-2t}, & \text{se } t < \frac{1}{2} \text{ e } |x| < 1 - 2t, \\ 1 - 2(|x| + t), & \text{se } |x| > 1 - 2t, \text{ oppure se } t > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.67)$$

che non è differenziabile sulla semiretta $(x = 0, t \geq \frac{1}{2})$.

Capitolo 3

Soluzioni di viscosità

In questo capitolo si proporrà un metodo di analisi delle equazioni di Hamilton-Jacobi con un altro tipo di approccio: il metodo della *viscosità evanescente*. Secondo questo metodo il problema di H-J può essere visto come il limite, al tendere a zero di un certo parametro, di un altro problema. Il problema originario può essere modificato in questo senso: ci si chiede se una soluzione del problema con il termine di viscosità possa tendere ad una soluzione del problema H-J allo svanire del termine di viscosità. Tale passaggio al limite sarà garantito dal criterio di Ascoli-Arzelà sulla compattezza della famiglia di funzioni equicontinue ed equilimitate nello spazio delle funzioni continue sui compatti di \mathbb{R}^n con la norma uniforme. Molti degli argomenti utilizzati in questo capitolo sono tratti dal testo [3].

3.1 Viscosità evanescente

Ricordiamo la definizione del nostro problema standard:

$$\begin{cases} u_t + H(Du, x) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u = g & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Nei precedenti capitoli sono stati proposti criteri di esistenza ed unicità di soluzioni del suddetto problema nel caso in cui la funzione H non dipendesse dalla variabile x e sotto tali criteri si è mostrato che esso ammette come unica soluzione la formula di Hopf-Lax ricavata a partire dall'equivalenza con la soluzione del problema di minimo dell' integrale d'azione. Ora si intende cercare un criterio per risolvere il problema H-J completo di variabile x . Definiamo il nuovo approccio

$$\begin{cases} u_t^\epsilon + H(Du^\epsilon, x) - \epsilon \Delta u^\epsilon = 0 \\ u^\epsilon = g \end{cases} \quad (3.2)$$

dove $\epsilon > 0$ e Δu^ϵ indica il laplaciano di u^ϵ nella variabile spaziale. Ci aspettiamo, già d' ora, che il controllo sulle stime delle funzioni u^ϵ dipendano dagli effetti regolarizzanti di $\epsilon \Delta$, e che esse si degraderanno per $\epsilon \rightarrow 0^+$. La famiglia $\{u^\epsilon\}_\epsilon$ è equicontinua ed equilimitata su tutti i compatti di $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$; dunque per il criterio di compattezza di Ascoli-Arzelà esiste una sottosuccessione $\{u^{\epsilon_j}\}$ convergente ad una qualche funzione continua u localmente in norma uniforme ($\|\cdot\|_\infty$). Ricordiamo il teorema di Ascoli-Arzelà per la convergenza uniforme.

Teorema 3.1 (Ascoli-Arzelà). *Sia $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ una successione di funzioni $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, sia essa equicontinua nella norma $\|\cdot\|_\infty$ ossia verifichi la relazione*

$$\forall \epsilon \exists \delta : \text{se } |x - y| < \delta \rightarrow \|f_k(x) - f_k(y)\|_\infty < \epsilon \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$$

ed equilimitata ovvero esiste una costante $M > 0$ tale che

$$|f_k| \leq M \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Allora esiste una sottosuccessione $\{f_{k_j}\}$ ed una funzione f continua tale che $f_{k_j} \Rightarrow f$ uniformemente sugli insiemi compatti di \mathbb{R}^n .

Per ora possiamo solo sperare che u , limite di u^{ϵ_j} , sia un qualche tipo di soluzione, non ancora definita, del problema standard. Non abbiamo per adesso alcuna informazione sulla regolarità della funzione u . Facciamo le seguenti ipotesi sulle funzioni H , g coinvolte nel problema H-J:

$$H, g \quad \text{continue.} \quad (3.3)$$

Fissiamo una funzione $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$. Supponiamo che esista un punto $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ in cui la funzione $u - v$ abbia un *massimo locale stretto*. Allora esisterà un intorno non banale di (x_0, t_0) in cui $(u - v)(x, t) \leq (u - v)(x_0, t_0)$. Avendosi convergenza uniforme della sottosuccessione $\{u_{\epsilon_j}\}$ scelto $\epsilon_j > 0$, sufficientemente piccolo, esisterà un punto $(x_{\epsilon_j}, t_{\epsilon_j})$ tale che $(u^{\epsilon_j} - v)(x, t)$ abbia un massimo locale in $(x_{\epsilon_j}, t_{\epsilon_j})$, $(x_{\epsilon_j}, t_{\epsilon_j}) \rightarrow (x_0, t_0)$ per $j \rightarrow \infty$. Inoltre

$$\begin{aligned} Du^{\epsilon_j}(x_{\epsilon_j}, t_{\epsilon_j}) &= Dv(x_{\epsilon_j}, t_{\epsilon_j}) = 0 \\ u_t^{\epsilon_j}(x_{\epsilon_j}, t_{\epsilon_j}) &= v_t(x_{\epsilon_j}, t_{\epsilon_j}) = 0 \\ -\Delta u^{\epsilon_j}(x_{\epsilon_j}, t_{\epsilon_j}) &\geq -\Delta v(x_{\epsilon_j}, t_{\epsilon_j}). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Inserendo queste relazioni nella definizione del problema viscoso (3.2) si ha :

$$\begin{aligned} &v_t(x_{\epsilon_j}, t_{\epsilon_j}) + H(Dv(x_{\epsilon_j}, t_{\epsilon_j}), x_{\epsilon_j}) \\ &= u_t^{\epsilon_j}(x_{\epsilon_j}, t_{\epsilon_j}) + H(Du^{\epsilon_j}(x_{\epsilon_j}, t_{\epsilon_j}), x_{\epsilon_j}) \\ &= \epsilon_j \Delta u^{\epsilon_j}(x_{\epsilon_j}, t_{\epsilon_j}) \\ &\leq \epsilon_j \Delta v(x_{\epsilon_j}, t_{\epsilon_j}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Per $\epsilon_j \rightarrow 0$ si ottiene la seguente relazione che coinvolge soltanto la funzione v nel punto di *massimo locale stretto*:

$$v_t(x_0, t_0) + H(Dv(x_0, t_0), x_0) \leq 0. \quad (3.6)$$

Ripetendo il ragionamento nel caso di (x_0, t_0) *minimo locale stretto* si giunge

ad una condizione opposta:

$$v_t(x_0, t_0) + H(Dv(x_0, t_0), x_0) \geq 0. \quad (3.7)$$

Le relazioni precedenti possono essere trovate anche partendo dalle ipotesi che $(u - v)(x_0, t_0)$ sia semplicemente un massimo (o minimo) locale. Infatti definendo $\tilde{v}(x, t) = v(x, t) \pm \delta(|x - x_0|^2 + (t - t_0)^2)$ la funzione $u - \tilde{v}$ avrà un massimo (o minimo) locale *stretto* in (x_0, t_0) e sono dunque valide le relazioni precedenti con \tilde{v} al posto di v .

Possiamo riassumere quanto detto finora affermando che è possibile definire una ‘soluzione debole’ del problema H-J in funzione dell’esistenza di una funzione v che trasporti tutta la regolarità necessaria, e soddisfi le relazioni (3.6), e (3.7) nei rispettivi casi di massimo o minimo locale.

Definizione 3.1 (Soluzione di viscosità).

Una soluzione del problema H-J con dato iniziale (2.1) è detta *viscosa* se rispetta le seguenti condizioni:

- (i) u limitata ed uniformemente continua $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$
- (ii) $u = g$ in $\mathbb{R}^n \times (t = 0)$
- (iii) per ogni $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ si ha che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } u - v \text{ ha un massimo locale in un punto } (x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ \text{allora } v_t(x_0, t_0) + H(Dv(x_0, t_0), x_0) \leq 0, \end{array} \right. \quad (3.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } u - v \text{ ha un minimo locale in un punto } (x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ \text{allora } v_t(x_0, t_0) + H(Dv(x_0, t_0), x_0) \geq 0. \end{array} \right. \quad (3.10)$$

3.2 Consistenza

Verifichiamo innanzitutto che una *soluzione classica* $u \in C^1$ di (2.1), limitata ed uniformemente continua è anche una *soluzione viscosa*. Infatti se (x_0, t_0) è di massimo (o minimo) per $u - v$ allora

$$\begin{cases} Du(x_0, t_0) = Dv(x_0, t_0), \\ u_t(x_0, t_0) = v_t(x_0, t_0), \\ v_t(x_0, t_0) + H(Dv(x_0, t_0), x_0) = u_t(x_0, t_0) + H(Du(x_0, t_0), x_0) = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Lemma 3.2. *Supponiamo che una funzione u della variabile x sia continua e differenziabile in qualche punto x_0 . Allora esiste una funzione $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$ tale che :*

$$\begin{aligned} (T_1) \quad & u_{x_0} = v_{x_0} \\ (T_2) \quad & u - v \text{ ha un massimo locale in } x_0 \\ & v := \int_{|x|}^{2|x|} \rho_2(r) dr \\ & \rho_1(x) \text{ continua, } \rho_1(0) = 0, \rho_2 = \max_{x \in B(r)} \{|\rho_1(x)|\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Teorema 3.3 (Consistenza della soluzione viscosa con il problema H-J). *Sia*

- (i) u una soluzione di viscosità del problema (2.1),
- (ii) u differenziabile in un punto $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n$.

Allora:

$$u_t(x_0, t_0) + H(Du(x_0, t_0), x_0) = 0. \quad (3.13)$$

In altre parole una soluzione viscosa differenziabile in un punto è anche una soluzione classica di H-J in quel punto.

Dimostrazione. Applicando il lemma precedente ad u rimpiazzando \mathbb{R}^n con \mathbb{R}^{n+1} ed x_0 con (x_0, t_0) , deduciamo subito che esiste una funzione v tale che

$$u - v \text{ ha un massimo stretto in } (x_0, t_0). \quad (3.14)$$

Regolarizzando la funzione v otteniamo la funzione $v^\epsilon := \eta_\epsilon * v$, in $n + 1$ variabili (x, t) . Allora per $\epsilon \rightarrow 0$ si ha che $v^\epsilon \rightarrow v$, $Dv^\epsilon \rightarrow Dv$ (uniformemente vicino ad (x_0, t_0)) e $v_t^\epsilon \rightarrow v_t$. In virtù della (3.14) si ha che

$$u - v^\epsilon \quad \text{ha un massimo in qualche} \quad (x_\epsilon, t_\epsilon), \quad (3.15)$$

con

$$(x_\epsilon, t_\epsilon) \rightarrow (x_0, t_0).$$

Possiamo ora applicare la definizione di soluzione di viscosità alla funzione $u - v^\epsilon$ ed ottenere.

$$v_t^\epsilon(x_\epsilon, t_\epsilon) + H(Dv^\epsilon(x_\epsilon, t_\epsilon), x_0) \leq 0. \quad (3.16)$$

e per convergenza, possiamo mandare $\epsilon \rightarrow 0$ e dedurre che :

$$v_t(x_0, t_0) + H(Dv(x_0, t_0), x_0) \leq 0. \quad (3.17)$$

Inoltre, sempre dalla (3.14) e dalla differenziabilità della u in (x_0, t_0) , si ricava che $Du(x_0, t_0) = Dv(x_0, t_0)$ ed $u_t(x_0, t_0) = v_t(x_0, t_0)$, e quindi sostituendo tali relazioni nella (3.17) si ottiene:

$$u_t(x_0, t_0) + H(Du(x_0, t_0), x_0) \leq 0. \quad (3.18)$$

La disuguaglianza inversa rispetto alla (3.18), può essere ricavata applicando il lemma (3.2), questa volta, alla funzione $-u$ in \mathbb{R}^{n+1} , trovando che esiste una funzione v che ha minimo stretto in (x_0, t_0) . Infine, ripetendo il ragionamento fatto per giungere alla (3.18), si ottiene

$$u_t(x_0, t_0) + H(Du(x_0, t_0), x_0) \geq 0. \quad (3.19)$$

Questa disuguaglianza completa la dimostrazione. □

Non è restrittivo ricondurci ad un problema ad *orizzonte finito* che definiamo in questo modo:

$$\begin{cases} u_t + H(Du, x) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ u = g & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (3.20)$$

perchè si può dimostrare che la definizione di *soluzione di viscosità* resta valida anche quando il punto di massimo (o minimo) della funzione $u - v$ si presenti sul bordo del dominio, ossia in un punto del tipo (x_0, T)

Teorema 3.4 (Unicità della soluzione viscosa). *Supponiamo che esista qualche costante $C > 0$ tale che:*

$$\begin{aligned} (i) \quad & |H(p, x) - H(\tilde{p}, x)| \leq C|p - \tilde{p}|, \\ (ii) \quad & |H(p, x) - H(p, \tilde{x})| \leq C|x - \tilde{x}|(1 + |p|), \end{aligned} \quad (3.21)$$

Allora esiste al più una soluzione viscosa di (3.20).

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano due soluzioni viscosi distinte u, \tilde{u} . Allora $\sigma = \sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} (u - \tilde{u}) > 0$. Si utilizzerà un metodo detto “di raddoppio delle variabili”: fissiamo due costanti $0 < \lambda, \epsilon < 1$ e definiamo la seguente funzione:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, t, s) = & u(x, t) - \tilde{u}(y, s) - \lambda(t + s) \\ & - \frac{1}{\epsilon^2} (|x - y|^2 + |s - t|^2) - \epsilon (|x|^2 + |y|^2) \end{aligned} \quad (3.22)$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $s, t \geq 0$. Essendo u, \tilde{u} continue e limitate, esisterà un punto in (x_0, y_0, t_0, s_0) in $\mathbb{R}^{2n} \times [0, T]^2$ per cui

$$\Phi(x_0, y_0, t_0, s_0) = \max_{\mathbb{R}^{2n} \times [0, T]^2} \Phi(x, y, t, s).$$

Consideriamo ora il valore di $\sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} \Phi(x, x, t, t)$. Come funzione di λ, ϵ esiste il limite per $\lambda, \epsilon \rightarrow 0$ ed esso tende dal basso a σ , dunque esistono λ, ϵ sufficientemente piccoli per cui vale la relazione

$$\sup_{\mathbb{R}^{2n} \times [0, T]^2} \Phi(x, x, t, t) \geq \frac{\sigma}{2}.$$

Inoltre essendo $\Phi(x_0, y_0, t_0, s_0) \geq \Phi(0, 0, 0, 0)$ risulta :

$$\lambda(t_0 + s_0) - \frac{1}{\epsilon^2} (|x_0 - y_0|^2 + |t_0 - s_0|^2) + \epsilon (|x|^2 + |y|^2) \leq u(x, t) - \tilde{u}(y, s) \quad (3.23)$$

da cui $|x_0 - y_0|^2, |t_0 - s_0|^2 = O(\epsilon^2)$,

$$|x_0 - y_0|, |s_0 - t_0| = O(\epsilon) \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0. \quad (3.24)$$

Inoltre abbiamo che $\epsilon (|x|^2 + |y|^2) = O(1)$ e per la diseguaglianza di Schwarz:

$$\begin{aligned} \epsilon (|x_0| + |y_0|) &= \epsilon^{1/4} \epsilon^{3/4} (|x_0| + |y_0|) \\ &\leq \epsilon^{1/2} + C (|x_0| + |y_0|) \\ &\leq \epsilon^{1/2}, \end{aligned}$$

dunque

$$\epsilon (|x_0| + |y_0|) = O(\epsilon^{1/2}). \quad (3.25)$$

Dato che $\Phi(x_0, y_0, t_0, s_0) \geq \Phi(x_0, x_0, t_0, t_0)$ abbiamo:

$$\begin{aligned} u(x_0, t_0) - \tilde{u}(y_0, s_0) - \lambda(t_0 + s_0) - \frac{1}{\epsilon^2} (|x_0 - y_0|^2 + |t_0 - s_0|^2) - \epsilon (|x_0|^2 + |y_0|^2) \\ \geq u(x_0, t_0) - \tilde{u}(x_0, t_0) - 2\lambda t_0 - 2\epsilon |x_0|^2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon^2} (|x_0 - y_0|^2 + |t_0 - s_0|^2) &\leq \tilde{u}(x_0, t_0) - \tilde{u}(x_0, t_0) + \lambda(t_0 - s_0) \\ &\quad + \epsilon(x_0 + y_0) \cdot (x_0 - y_0). \end{aligned} \quad (3.27)$$

In virtù delle relazione (3.24) e (3.25) e della uniforme continuità della \tilde{u} (ammessa per ipotesi di soluzione viscosa) allora :

$$|x_0 - y_0|, |t_0 - s_0| = o(\epsilon). \quad (3.28)$$

Ricordando che il *modulo di continuità* di una funzione *uniformemente continua* è quella funzione $w(r) : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$, $w(0) = 0$, tale che $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq w(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Nel caso di u ed \tilde{u} possiamo definire i loro moduli di continuità

come w ed \tilde{w} tali che per ogni $0 \leq t, s \leq T$ ed $x, y \in \mathbb{R}^n$ si abbia che $|u(x, t) - u(y, s)| \leq w(|x - y| + |t - s|)$, $|\tilde{u}(x, t) - \tilde{u}(y, s)| \leq \tilde{w}(|x - y| + |t - s|)$. Applicando le stime precedenti alla relazione $\frac{\sigma}{2} \leq \Phi(x_0, y_0, t_0, s_0)$ abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{2} &\leq \Phi(x_0, y_0, t_0, s_0) = u(x_0, t_0) - \tilde{u}(y_0, s_0) - \alpha(x_0, y_0, t_0, s_0, \lambda, \epsilon) \\ &\stackrel{1}{\leq} u(x_0, t_0) - \tilde{u}(y_0, s_0) \leq |u(x_0, t_0) - u(x_0, 0)| + |u(x_0, 0) - \tilde{u}(x_0, 0)| \\ &\quad + |\tilde{u}(x_0, 0) - \tilde{u}(x_0, t_0)| + |\tilde{u}(x_0, t_0) - \tilde{u}(y_0, s_0)| \\ &\leq w(t_0) + \tilde{w}(t_0)\tilde{w}(|x_0 - y_0| + |t_0 - s_0|) \leq w(t_0) + \tilde{w}(t_0) + \tilde{w}(o(\epsilon)). \end{aligned} \quad (3.29)$$

L'ultimo termine di questa stima può essere reso piccolo a piacere ad esempio $w(o(\epsilon)) \leq \frac{\sigma}{4}$ cosicchè $0 < \frac{\sigma}{4} \leq wt_0 + \tilde{w}(t_0)$. Dato che u e \tilde{u} coinciderebbero per $t_0 = 0$ necessariamente dovrà essere che $t_0 > 0$. Ripetendo tali passaggi in funzione di s_0 si ricava che anche $s_0 > 0$. Alla luce di quanto detto fin qui, possiamo osservare che la mappa $(x, t) \rightarrow \phi(x, y_0, t, s_0)$ ha un massimo nel punto (x_0, t_0) quindi, se definiamo

$$v(x, t) := \tilde{u}(y_0, s_0) + \lambda(t + s_0) - \frac{1}{\epsilon^2} (|x - y_0|^2 + |t - s_0|^2) + \epsilon (|x|^2 + |y_0|^2)$$

si ha che: la funzione

$$u - v \quad \text{ha un massimo in } (x_0, t_0).$$

Essendo u soluzione di viscosità otteniamo che

$$v_t(x_0, t_0) + H(D_x v(x_0, t_0), x_0) \leq 0.$$

Calcolando esplicitamente quest'ultima disuguaglianza otteniamo:

$$\lambda + \frac{2(t_0 - s_0)}{\epsilon^2} + H\left(\frac{2}{\epsilon^2}(x_0 - y_0) + 2\epsilon x_0, x_0\right) \leq 0. \quad (3.30)$$

Allo stesso modo: la mappa $(y, s) \rightarrow \phi(x_0, y, t_0, s)$ ha un massimo in (y_0, s_0) ,

$$\tilde{u} - \tilde{v} \quad \text{ha un minimo in } (y_0, s_0)$$

¹dove abbiamo usato $0 < \alpha(x_0, y_0, t_0, s_0) = \lambda(t_0 + s_0) - \frac{1}{\epsilon^2} (|x_0 - y_0|^2 + |t_0 - s_0|^2) + \epsilon (|x_0|^2 + |y_0|^2)$.

3.3 Soluzione viscosa di tipo Lax per problema H-J a tempo finito 61

e dunque:

$$-\lambda + \frac{2(t_0 - s_0)}{\epsilon^2} + H\left(\frac{2}{\epsilon^2}(x_0 - y_0) - 2\epsilon y_0, y_0\right) \geq 0. \quad (3.31)$$

Sottraendo la (3.31) alla (3.30) si ha:

$$2\lambda \leq H\left(\frac{2}{\epsilon^2}(x_0 - y_0) - 2\epsilon y_0, y_0\right) - H\left(\frac{2}{\epsilon^2}(x_0 - y_0) + 2\epsilon x_0, x_0\right). \quad (3.32)$$

Ricordando le ipotesi sulla funzione H e le relazioni (3.24) e (3.25) otteniamo che:

$$\begin{aligned} 2\lambda &\leq H\left(\frac{2}{\epsilon^2}(x_0 - y_0) - 2\epsilon y_0, y_0\right) - H\left(\frac{2}{\epsilon^2}(x_0 - y_0) - 2\epsilon y_0, x_0\right) \\ &\quad H\left(\frac{2}{\epsilon^2}(x_0 - y_0) - 2\epsilon y_0, x_0\right) - H\left(\frac{2}{\epsilon^2}(x_0 - y_0) + 2\epsilon x_0, x_0\right) \\ &\leq C|x_0 - y_0| \left(1 + \frac{2}{\epsilon^2}(x_0 - y_0)\right) - 2\epsilon y_0 + 2C(\epsilon|x_0| + |y_0|) \\ &= o(\epsilon) \left(1 + 2o(\epsilon)/\epsilon^2 + 2\epsilon^{1/2}\right) + o(\epsilon^{1/2}) \quad \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Siamo giunti quindi alla contraddizione $0 < \lambda \leq 0$. \square

3.3 Soluzione viscosa di tipo Lax per problema H-J a tempo finito

Osserveremo in questa sezione che la formula di Hopf-Lax è soluzione in senso *viscoso* del problema di H-J nel caso particolare in cui H non dipenda dalla variabile spaziale e che il dato sul bordo sia limitato:

$$\begin{cases} u_t + H(Du) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ u = g & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (3.34)$$

Teorema 3.5 (Formula di Hopf-lax come soluzione viscosa). *Supponiamo che H sia convessa e superlineare², e g sia limitata. Allora l'unica soluzione viscosa del problema con dato iniziale (3.34) è dato dalla formula di Hopf-Lax:*

$$f(x, t) := \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ tL\left(\frac{x - y}{t}\right) + g(y) \right\}. \quad (3.35)$$

²condizione sufficiente per l'esistenza di una soluzione debole q.o.

3.3 Soluzione viscosa di tipo Lax per problema H-J a tempo finito 62

Dimostrazione. Cio che si intende dimostrare è che la funzione $f(x, t)$ soddisfa le condizioni (3.8), (3.9) e (3.9). Come si vede dal Lemma (2.20) se g è lipschitziana allora anche la funzione $u(x, t) = f(x, t)$ è lipschitziana nelle variabili (x, t) , (dunque uniformemente continua). D'altronde per dualità anche L è *convessa* e *superlineare* e se in più g è limitata, allora dalla definizione anche $f(x, t)$ sarà limitata.

Fissiamo $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ e assumiamo che $u - v$ abbia un massimo locale in (x_0, t_0) . Dunque per (x, t) sufficientemente vicino a (x_0, t_0) :

$$u(x_0, t_0) - v(x_0, t_0) \geq u(x, t) - v(x, t).$$

Come è stato mostrato nel teorema 2.18 si ha che :

$$u(x_0, t_0) := \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ (t_0 - t)L \left(\frac{x - y}{t - t_0} \right) + u(x, t) \right\} \quad \forall 0 < t \leq t_0, x \in \mathbb{R}^n.$$

In generale quindi $u(x_0, t_0) \leq (t_0 - t)L \left(\frac{x - y}{t_0 - t} \right) + u(x, t)$, e combinando questa relazione con quella di massimo locale si ha:

$$v(x_0, t_0) - v(x, t) \leq (t_0 - t)L \left(\frac{x - y}{t_0 - t} \right).$$

Ponendo $h = t_0 - t$ ed $x = x_0 - hq$ con $q \in \mathbb{R}^n$, ed operando queste sostituzioni nella relazione precedente otteniamo :

$$v(x_0, t_0) - v(x_0 - hq, t_0 - h) \leq hL(q).$$

Dividendo per h e mandando $h \rightarrow 0$ si ha :

$$v_t(x_0, t_0) + Dv(x_0, t_0) \cdot q - L(q) \leq 0, \quad \forall q \in \mathbb{R}^n$$

e quindi applicando la definizione di H si giunge alla disuguaglianza cercata

$$v_t(x_0, t_0) + H(Dv(x_0, t_0)) \leq 0.$$

Per dimostrare la disuguaglianza opposta nel caso in cui (x_0, t_0) sia punto di minimo per $u - v$ si procede invece per assurdo. Supponendo quindi che esista $\theta > 0$ tale che:

$$v_t(x_0, t_0) + H(Dv(x_0, t_0)) \leq -\theta < 0, \quad (3.36)$$

3.3 Soluzione viscosa di tipo Lax per problema H-J a tempo finito 63

per definizione di H , come trasformata di Legendre, per (x, t) molto vicino ad (x_0, t_0) si ha :

$$v_t(x, t) + Dv(x, t) \cdot q - L(q) \leq -\theta \quad \forall q \in \mathbb{R}^n.$$

Utilizzando la proprietà di ricorsione (2.40) della formula di Hopf al punto (x_0, t_0) esisterà un punto x_1 sufficientemente vicino a x_0 ed un $h > 0$ sufficientemente piccolo in modo tale che:

$$u(x_0, t_0) = hL\left(\frac{x_0 - x_1}{h}\right) + u(x_1, t_0 - h). \quad (3.37)$$

Inoltre possiamo scrivere che :

$$\begin{aligned} v(x_0, t_0) - v(x_1, t_0 - h) &= \int_0^1 \frac{d}{ds} v(sx_0 + (1-s)x_1, t_0 + (s-1)h) ds \\ &= \int_0^1 Dv(sx_0 + (1-s)x_1, t_0 + (s-1)h) \cdot (x_0 - x_1) \\ &\quad + v_t(sx_0 + (1-s)x_1, t_0 + (s-1)h) h ds \\ &= h \left(\int_0^1 Dv(\dots) \cdot q + v_t(\dots) ds \right), \quad \text{con } q = \frac{x_0 - x_1}{h}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Possiamo combinare questa stima con la (3.36) ed ottenere

$$v(x_0, t_0) - v(x_1, t_0 - h) \leq hL\left(\frac{x_0 - x_1}{h}\right) - \theta h$$

e ricordando la (3.37) otteniamo

$$v(x_0, t_0) - v(x_1, t_0 - h) \leq u(x_0, t_0) - v(x_1, t_0 - h) - \theta h$$

che contraddice l' ipotesi che (x_0, t_0) sia punto di minimo locale per $u - v$.

Fin qui abbiamo dimostrato che la funzione $f(x, t)$ è soluzione in senso viscoso.

Resta da mostrare che essa è l'unica. A prima vista le ipotesi di convessità e superlinearità H (necessarie per la dualità e per la definizione di $f(x, t)$ in forma di minimo) sembrerebbero discordare con l'applicabilità del teorema di unicità viscosa. Tuttavia però avendo ottenuto che $f(x, t)$ è lipschitziana (se g lo è) allora

il gradiente $|Df(x, t)| \leq \mathbf{Lip}(g) = 1$ sarà limitato e la funzione $H(Df)$ esplorerà un sottoinsieme limitato del proprio dominio. Inoltre la consistenza della funzione $f(x, t)$ con il problema H-J sarà indipendente dal comportamento di H all'esterno di questo insieme purchè, ivi, essa resti convessa. Possiamo dunque ridefinire H in $|p| \geq \mathbf{Lip}(g) = 1$ modo tale che sia anche lipschitziana rispetto alla variabile p così da poter applicare il teorema di unicità della soluzione viscosa. \square

3.4 Conclusioni

Riepiloghiamo brevemente i risultati sulle funzioni H e g che compaiono nelle equazioni di Hamilton-Jacobi e sulle relative soluzioni.

- $H(p, x), g(x) \in C^2 \Rightarrow \exists, !$ soluzione **locale** classica C^2 ;
- $H(p), g(x) \in C^2 \Rightarrow \exists, !$ soluzione **locale**
(ottenibile per mezzo del metodo delle caratteristiche della forma
 $u(x, t) = g(X^{-1}(x, t)) + t[DH(Dg(X^{-1}(x, t))) \cdot Dg(X^{-1}(x, t)) - H(Dg(X^{-1}(x, t)))]$);
- $H(p), g(x) \in C^2, \text{convesse} \Rightarrow \exists, !$ soluzione **globale** classica C^2
- Esempio $H(p), g(x) \in C^2, H$ **convessa/concava**, g **concava/convessa**; $\Rightarrow \exists, !$
soluzione **non globale** classica C^2
- $H, L \in \mathcal{J} = \{\text{convesse, superlineari}\} \Rightarrow H(p) = L^*(p), H^*(q) = L(q)$;
- $H \in C^a, L \in C^a \forall a \geq 1$;
- $g \in Lip, H(p, x) = H(p) \in \mathcal{J} \cap C^2 \Rightarrow \exists$ **Hopf-Lax** formula $f(x, t): f(x, t) = u(x, t)$
 $\Rightarrow u(x, t)$ risolve H-J q.o.
- $g \in Lip, H(p, x) = H(p) \in \mathcal{J} \cap C^2$ Esempi di non unicità della soluzione di Hopf-Lax;
(necessità di discriminazione, soluzioni deboli);
- g C_g -**semiconcava**, $H(p, x) = H(p) \in \mathcal{J} \Rightarrow f(x, t)$ C_g -**semiconcava** in x ;

- $H(p)$ θ -uniformemente convessa, $H(p, x) = H(p) \in \mathcal{J} \Rightarrow f(x, t) \frac{1}{\theta t}$ -semiconcava in x ;
- Definizione di *soluzione debole*: $u(x, t) \in Lip, C(1 + \frac{1}{t})$ -semiconcava in x ;
- $H(p) \in \mathcal{J} \cap C^2, g \in Lip \Rightarrow ! u$ soluzione debole;
- $H(p) \in \mathcal{J} \cap C^2, g \in Lip$ ed inoltre g C_g -semiconcava oppure H ; θ -uniformemente convessa $\Rightarrow f(x, t)$ è l'unica soluzione debole;
- Definizione di *soluzione viscosa* con H dipendente $x, (H(p, x))$: u soddisfi il dato iniziale $u(x, 0) = g(x), u(x, t)$ uniformemente continua, limitata, e tale che per ogni $v \in C^\infty$, se $u - v$ ha massimo(minimo) locale in (x_0, t_0) si ha che $v_t(x_0 + H(Dv(v(x, t))), x) < 0$ (rispettivamente > 0).
- u soluzione viscosa, differenziabile in $(x_0, t_0) \Rightarrow u$ soluzione classica in (x_0, t_0) ;
- u funzione continua e differenziabile in punto (x_0, t_0) allora si ha che esiste una classe di funzioni $v \in C^1$ tale che $(u - v)(x_0, t_0)$ è un minimo;
- sfruttando il risultato precedente, se u è differenziabile in (x_0, t_0) e soluzione viscosa risolve il problema H-J con $H = H(p, x)$;
- se esiste una costante $C > 0$ tale che $|H(p, x) - H(\tilde{p}, x)| \leq C|p - \tilde{p}|, |H(p, x) - H(p, \tilde{x})| \leq C|x - \tilde{x}|(1 + |p|) \Rightarrow$ al più esiste una soluzione viscosa;
- $H = H(p) \in \mathcal{J}, g$ limitata \Rightarrow la formula di **Hopf-Lax** $f(x, t)$ è l'unica soluzione viscosa.

Concludiamo questo capitolo con qualche commento.

1. La definizione di soluzione di viscosità è basata sul principio di confronto tra sopra e sottosoluzioni dell'equazione H-J.
2. La definizione si trova estesa in letteratura a funzioni u discontinue (ma semicontinue); è stata anche estesa a funzioni non limitate ma appartenenti ad L^1 .

Capitolo 4

Applicazioni

Un classico esempio di equazione di Hamilton-Jacobi che non presenti una soluzione classica (intesa come almeno C^1) ma, come vedremo dotata di *infinite* soluzioni C^1 quasi-ovunque ed *una sola* nel senso della viscosità è rappresentato dall' *equazione eiconale* $|Du| = n$ con $n \in \mathbb{N}$. L'equazione eiconale compare nella descrizione di numerosi problemi fisici legati all'ottica: ad esempio nella caratterizzazione della propagazione dei fronti d'onda nei solidi. Accanto alle applicazioni fisiche dell'equazione eiconale si accostiamo interpretazioni esclusivamente matematiche di cui mostreremo due esempi: 1) la soluzione del problema monodimensionale di ricerca della funzione di minima distanza da un insieme, 2) il problema di ricerca del tempo minimo di raggiungimento di un insieme bersaglio che può essere visto come una generalizzazione del problema di minima distanza.

Infine introdurremo il problema fisico delle trasformazioni canoniche, risolvibile in via teorica attraverso utilizzo di funzioni generatrici, e mostriamo che la funzione generatrice di una trasformazione particolare deve soddisfare un'equazione di Hamilton-Jacobi.

4.1 Distanza euclidea da un insieme, ed equazione eiconale

4.1.1 Equazione eiconale monodimensionale

Consideriamo il seguente problema:

$$\begin{cases} |Du(x)| = 1 & \forall x \in (-1, 1), \\ u(-1) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Dal teorema di Rolle segue immediatamente che non esiste alcuna funzione $C^1(-1, 1)$ che verifica l'equazione eiconale $|Du(x)| = 1$ in ogni punto, e quindi non esiste alcuna soluzione classica del problema. Esistono invece infinite soluzioni *quasi ovunque*, le cosiddette *funzioni di Rademacher* (veda la figura:4.1)

$$u_k(x) := \begin{cases} x + 1 - \frac{i}{2^{k-1}} & \text{se } x \in \left[-1 + \frac{i}{2^{k-1}}, -1 - \frac{2i+1}{2^{k-1}}\right) \\ -(x + 1) + \frac{i+1}{2^{k-1}} & \text{se } x \in \left[-1 + \frac{2i+1}{2^k}, -1 - \frac{i+1}{2^{k-1}}\right) \end{cases} \quad x \in I_i^{(k)}, \quad (4.2)$$

dove $I_i^{(k)}$ rappresentano gli intervalli $I_i^{(k)} = \left[-1 + \frac{i}{2^{k-1}}, -1 - \frac{i+1}{2^{k-1}}\right)$ e costituiscono una partizione dell'insieme $[-1, 1) = \bigcup_{i=0}^{2^{k-1}-1} I_i^{(k)}$. Tutte le funzioni $u^k(x)$ sono differenziabili quasi-ovunque, ed ivi risolvono l'equazione eiconale suddetta; la funzione limite: $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x) \equiv 0$ non soddisfa l'eiconale in alcun punto; l'unica soluzione viscosa del problema è la u^0 (che è concava).

Intendiamo mostrare in questa sezione che l'esistenza di una soluzione del problema di minimizzazione della distanza di un punto esterno (banale se interno) da un insieme può essere espresso in termini di un'equazione eiconale. Problema:

Sia K un sottoinsieme chiuso di \mathbb{R}^n , x in $\mathbb{R}^n \setminus K$.

Esiste per ogni x un $z^*(x) \in K$ tale che la funzione d_K definita come:

$$d_K(x) = \min_{z \in \mathbb{R}^n} |x - z| \text{ valga esattamente } |x - z^*(x)|.$$

E' interessante studiare come varia $d_K(x)$ al variare di $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$. Fissando in versore arbitrario v , si può differenziare la funzione d_K ed ottenere le seguenti due relazioni ¹:

$$\sup_{|v|=1} -Dd_K(x) \cdot v \leq 1 \tag{4.3}$$

$$\sup_{|v|=1} Dd_K(x) \cdot v \geq 1 \tag{4.4}$$

Utilizzando la caratterizzazione della norma per un vettore p di \mathbb{R}^n :

$$|p| = \sup_{|v|=1} p \cdot v \tag{4.5}$$

otteniamo l'equazione eiconale:

$$|Dd_K(x)| = 1. \tag{4.6}$$

Osservando che la funzione d_K è lipschitziana di costante $\mathbf{Lip}(g) = 1$ possiamo applicare il teorema di Rademacher e dedurre che d_K è differenziabile quasi ovunque (a meno di un sottoinsieme di misura nulla di \mathbb{R}^n) ed ivi risolve l'equazione eiconale. Tale soluzione coincide con la funzione $u_0(x)$ di Rademacher.

4.2 Problema di tempo minimo, generalizzazione dell' eiconale

In questo paragrafo introdurremo un problema fondamentale della teoria del controllo ottimo: quello della raggiungibilità di un *insieme bersaglio* nel minimo tempo. Riconosceremo che il risultato potrà essere visto come una generalizzazione della funzione distanza e che la funzione tempo minimo risolve una forma generalizzata della funzione eiconale. Descriveremo il problema di

¹per i dettagli vedere [5]

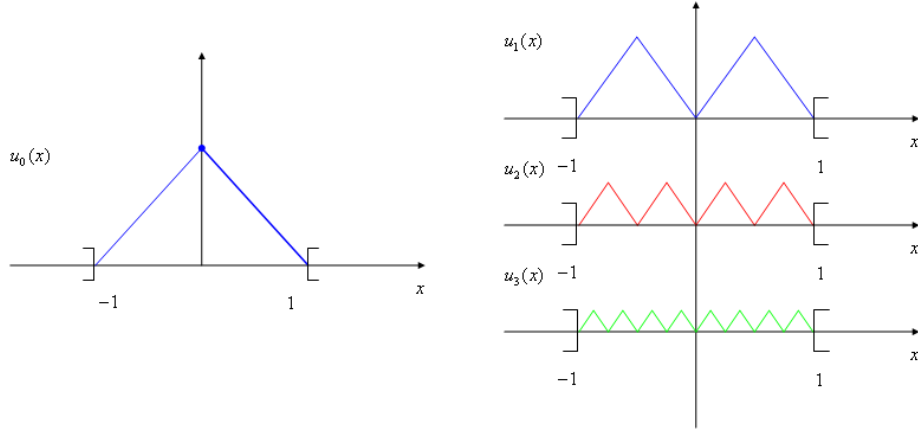


Figura 4.1: Funzioni di Rademacher

una formulazione non troppo generale, ma sufficiente per evidenziare le caratteristiche più significative del problema. Consideriamo un tipico problema di controllo descritto da un sistema di equazioni differenziali accoppiate ad un dato iniziale:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \sigma(\xi(t))c(t), & t > 0 \\ \xi(0; x, c) = x. \end{cases} \quad (4.7)$$

dove $\sigma(\cdot)$ è una matrice $N \times M$, c una funzione misurabile di t a valori nella sfera unitaria di \mathbb{R}^M , detta *funzione di controllo*. Definiamo, se esiste, la soluzione del problema (4.7) con questa notazione $\xi(t) := \xi(t; x, c)$. Supponendo che la funzione $y \rightarrow \sigma(y)$ sia continua, risulta che, se esiste una costante $L \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$(\sigma(y) - \sigma(x))(x) \cdot (x - y) \leq L|x - y|^2 \quad (4.8)$$

allora esiste un' unica soluzione globale $\xi(t; x, c)$ del problema (4.7).

Osserviamo inoltre che se σ è *lipschitziana* in particolare soddisfa la condizione (4.8).

Dato un insieme chiuso $K \subset \mathbb{R}^n$ con frontiera compatta, consideriamo il primo istante in cui la curva soluzione del problema (4.7) entra nell'insieme bersaglio K :

$$\tau(x, c) = \begin{cases} \min \{t \geq 0 : \xi(t; x, c) \in K\}, & \text{se } \{t \geq 0 : \xi(t; x, c) \in K\} \neq \emptyset \\ +\infty & \{t \geq 0 : \xi(t; x, c) \in K\} = \emptyset \end{cases} \quad (4.9)$$

Definizione 4.1. Denotiamo con \mathcal{C} l'insieme di tutti i controlli ammissibili. Si dice *funzione tempo minimo* la funzione $T : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$, definita ponendo:

$$T(x) = \inf_{c \in \mathcal{C}} \tau(x, c). \quad (4.10)$$

Definizione 4.2. Definiamo il seguente insieme:

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^N : T(x) < +\infty\}, \quad (4.11)$$

insieme raggiungibile, per ovvie ragioni. Se $\mathcal{R} = \mathbb{R}$ il sistema definito dal problema (4.7) si dirà **completamente controllabile**.

Eviteremo di discutere il problema della *completa controllabilità* supponendo che l'*insieme bersaglio* sia un sottoinsieme dell'*insieme raggiungibile*. Supponiamo inoltre che la funzione $T(x)$ sia ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ (naturalmente sarà nulla per $x \in K$). Intendiamo giungere alla seguente identità:

$$T(x) = t + \inf_{c \in \mathcal{C}} T(\xi(t, x, c)). \quad (4.12)$$

Fissiamo $x \in \mathbb{R}^N$. Iniziamo col notare dalla figura 4.2 che vale la seguente identità:

$$\tau(x, c) = t + \tau(\xi(t; x, \bar{c})) \quad \text{con} \quad \bar{c}(s) = c(t + s). \quad (4.13)$$

Quindi passando agli estremi inferiori si ha:

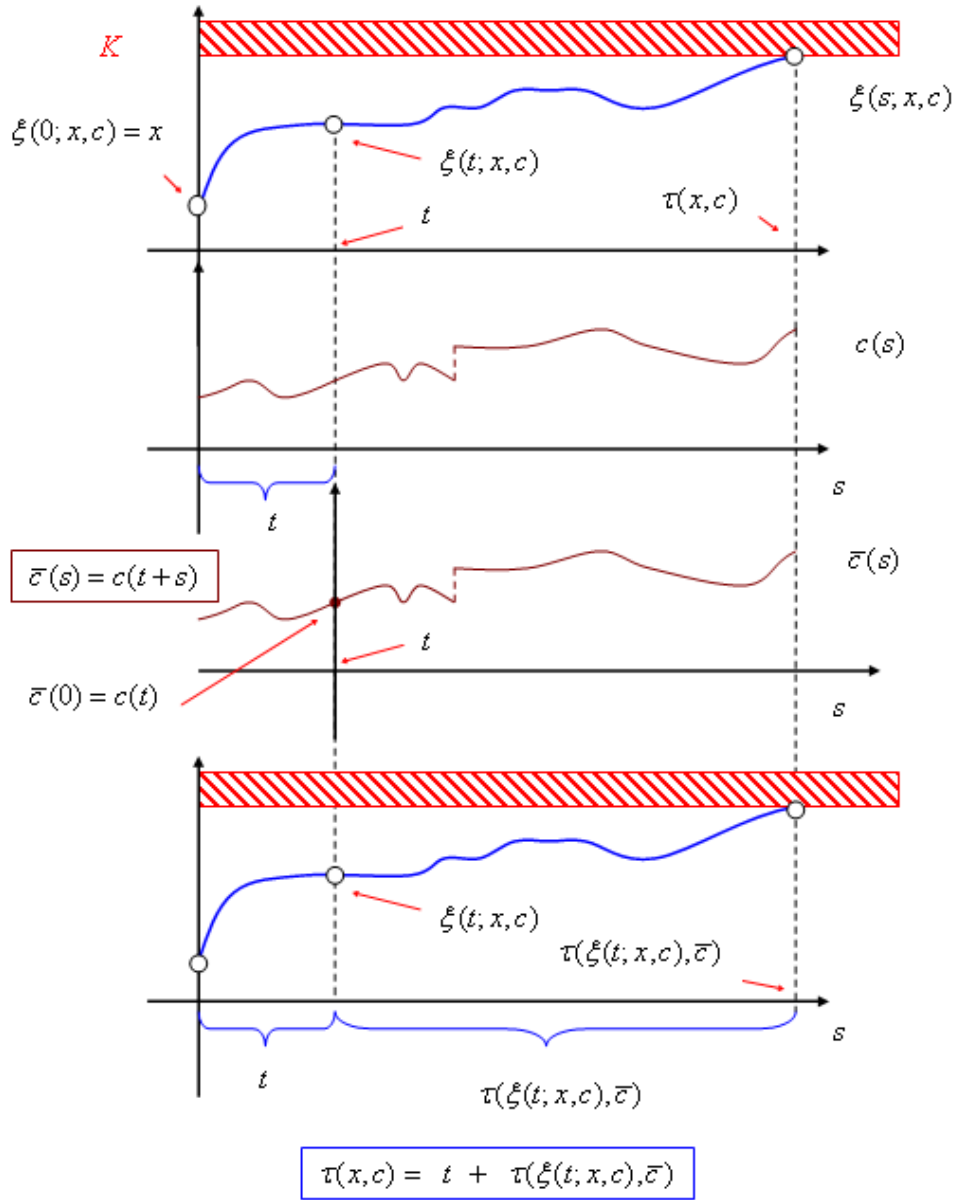


Figura 4.2: identità (4.13)

$$\inf_{c \in \mathcal{C}} \tau(x, c) \geq t + T(\xi(t; x, c)) \geq t + \inf_{c \in \mathcal{C}} T(\xi(t, x, c)) \quad (4.14)$$

otteniamo la prima delle disequaglianze:

$$T(x) \geq t + \inf_{c \in \mathcal{C}} T(\xi(t; x, c)). \quad (4.15)$$

Per definizione di estremo inferiore per ogni $\epsilon > 0$ esisterà un c^ϵ :

$$T(\xi(t; x, c)) = t + \inf_{c \in \mathcal{C}} \tau(\xi(t; x, c), c^\epsilon). \quad (4.16)$$

Definiamo il controllo seguente

$$\bar{c}(s) \begin{cases} c(s) & \text{se } s < t, \\ c^\epsilon(s - t) & \text{se } s > t. \end{cases} \quad (4.17)$$

Come si vede nella figura 4.3 risulta che:

$$T(x) \leq t + \tau(\xi(t; x, c), \bar{c}) = t + \tau(\xi(t; x, c), c^\epsilon) \leq t + [\epsilon + T(\xi(t; x, c))]. \quad (4.18)$$

Per l'arbitrarietà di $\epsilon > 0$, e poi passando agli estremi inferiori nel membro destro otteniamo prima:

$$T(x) \leq T(\xi(t; x, c)),$$

e poi la seconda delle disequaglianze desiderate:

$$T(x) \leq t + \inf_{c \in \mathcal{C}} T(\xi(t; x, c)). \quad (4.19)$$

Riferendoci alla relazione (4.12), consideriamo un controllo costante $c(t) = c$ ad abbiamo che:

$$\frac{T(x) - T(\xi(t; x, c))}{t} \leq 1, \quad \forall t \in [0, T(x)].$$

Se x è un punto di differenziabilità per T , passando al limite per $t \rightarrow 0^+$ e ricordando che in tal caso ξ risolve il problema (4.7) segue che:

$$-DT(x) \cdot \dot{\xi}(0; x, c) = -DT(x) \cdot \sigma(x)c \leq 1$$

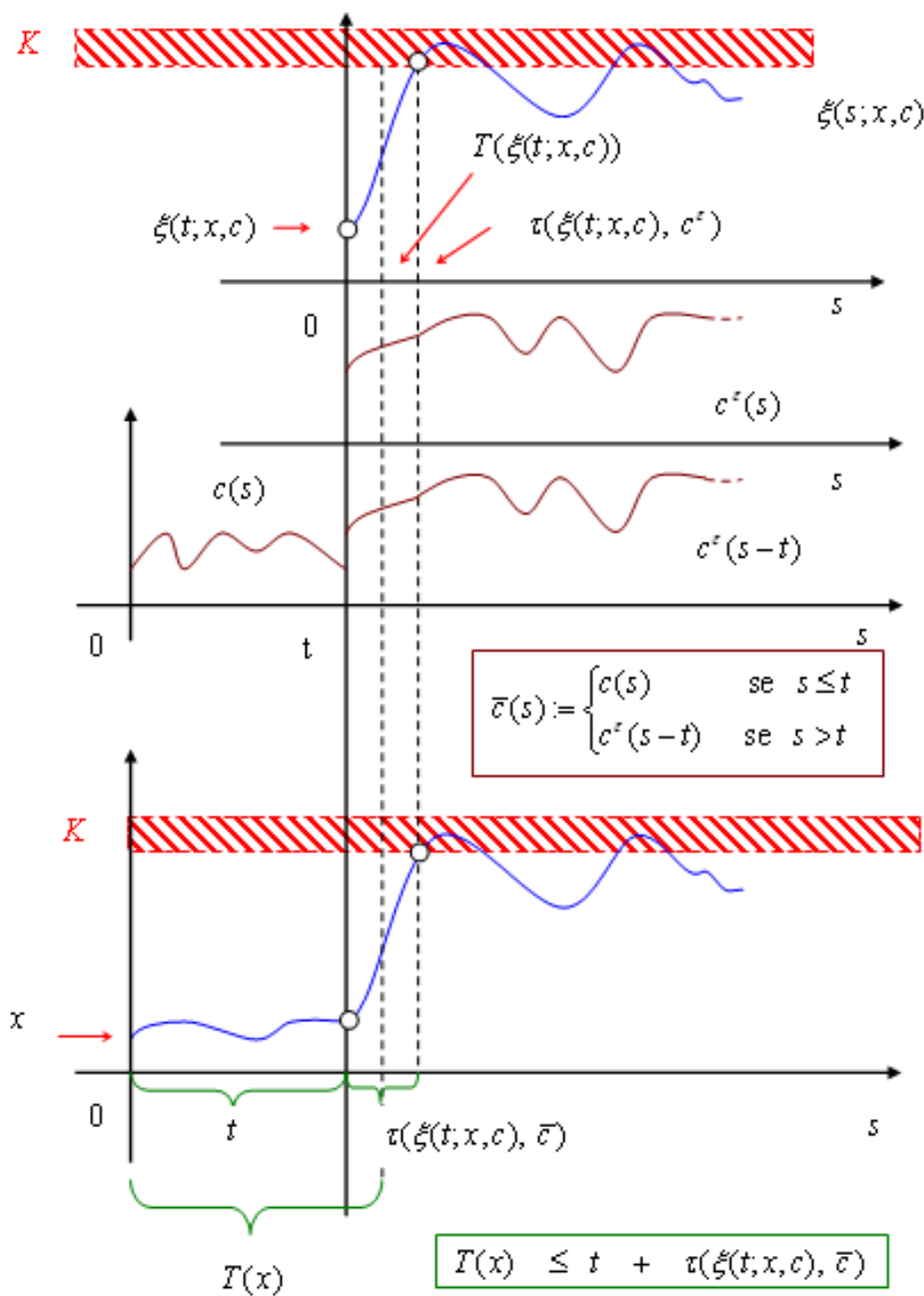


Figura 4.3: diseuguaglianza (4.18)

Poichè questa diseguaglianza vale per ogni c costante possiamo prendere l'estremo superiore ed avere:

$$\sup_{|c|<1} \{-DT(x) \cdot \sigma(x)c\} \leq 1. \quad (4.20)$$

Dimostriamo ora che se $T(x)$ è $C^1 \in \mathbb{R}^N \setminus K$, allora T verifica la diseguaglianza opposta della (4.20). Supponiamo per assurdo che invece che per ogni $|c| \leq 1$:

$$-DT(x) \cdot \sigma(x)c < 1. \quad (4.21)$$

Per continuità di DT esisterà un $\theta > 0$ tale che

$$-DT(x) \cdot \sigma(x)c < 1 - \theta. \quad (4.22)$$

per ogni $y \in U$, intorno aperto opportuno di x . Per definizione di estremo superiore, dalla relazione (4.12) esiste un controllo c^ϵ tale che:

$$T(x) \geq t + \inf_{c \in \mathcal{C}} T(\xi(t; x, c)) \geq t - \epsilon t + \epsilon t + T(\xi(t; x, c)) \geq t - \epsilon t + T(\xi(t; x, c^\epsilon),$$

e quindi che

$$T(x) + \epsilon t \geq t + T(\xi(t, x, c^\epsilon))$$

e che

$$\frac{T(x) - T(\xi(t, x, c^\epsilon))}{t} \geq \frac{t - \epsilon t}{t} = 1 - \epsilon.$$

Dato che abbiamo ipotizzato che $T \in C^1$ possiamo scrivere la precedente diseguaglianza in forma integrale:

$$1 - \epsilon \leq \frac{1}{t} \int_0^t -DT(\xi(t; x, c^\epsilon)) \cdot \sigma(\xi(s; x, c^\epsilon))c^\epsilon(s) ds.$$

Prendendo t sufficientemente piccolo $\xi(s; x, c^\epsilon) \in U$, per ogni $s \in [0, t]$. quindi legando l'ultima diseguaglianza con la (4.22) otteniamo:

$$1 - \epsilon \leq \frac{1}{t} \int_0^t (1 - \theta) ds = 1 - \theta,$$

il che si rivela assurdo se scegliamo $\epsilon < \theta$. Abbiamo dunque dimostrato che

$$\sup_{|c|<1} \{-DT(x) \cdot \sigma(x)c\}, \quad (4.23)$$

che è un'equazione alle derivate parziali del primo ordine per la funzione tempo minimo T . Osserviamo infine che scegliendo la *matrice identica* per la funzione σ e consideriamo solo i controlli costanti il problema di *tempo minimo* coincide con quello di *minima distanza* dall'insieme K .

4.3 Trasformazioni canoniche

Una delle più antiche e classiche applicazioni delle equazioni di Hamilton-Jacobi è quella delle trasformazioni canoniche. Stabilito che un sistema fisico può essere descritto da un'Hamiltoniana dipendente da *coordinate lagrangiane* q da *momenti generalizzati* p e dal tempo ($H = H(q, p, t)$), ci si può chiedere se è possibile trovare altre variabili Q e P rispetto a cui la nuova Hamiltoniana $H'(Q, P)$ assuma la stessa forma della precedente. Il motivo di tale ricerca risiede nella possibilità che le traiettorie $Q(t)$ e $P(t)$ governate dall'Hamiltoniana H' , siano delle funzioni lineari del tempo (e quindi facili da rappresentare).

Prima di addentrarci nel problema vero e proprio, ricordiamo che è possibile esprimere in modo completo il comportamento di un sistema fisico (ad esempio di punti materiali, corpi rigidi ecc.) nel tempo se sono note le funzioni (q, \dot{q}) ed i relativi dati iniziali. Se ad esempio il sistema è costituito da s punti materiali, ciascuno individuato da tre coordinate spaziali $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e sottoposto ad n vincoli indipendenti allora il numero di coordinate lagrangiane necessarie a descrivere il sistema sarà $l = 3s - n$. Finora le equazioni di Hamilton (2.4) sono state scritte in *spazio delle fasi* (p, x) , d'ora in avanti alla luce di quanto appena osservato le esprimeremo in funzione dello riferimento

lagrangiano (q, p) (nell'ordine inverso) ed assumeranno la forma del seguente sistema di $2l$ equazioni:

$$\text{Equazioni di Hamilton} \begin{cases} \dot{\mathbf{q}}(s) = D_p H(\mathbf{p}(s), \mathbf{q}(s)) \\ \dot{\mathbf{p}}(s) = -D_q H(\mathbf{p}(s), \mathbf{q}(s)). \end{cases} \quad (4.24)$$

In questa trattazione considereremo un caso un po' più generale di quello da cui abbiamo ricavato le (4.24). Per noi la Lagrangiana L dipenderà anche dal tempo: $L(q, \eta, t)$ e sarà definita in un aperto $U \subset \mathbb{R}^{2l+1}$. Supponendo che $L_\eta \in C^1$, $L_{q,t} \in C^0$, possiamo ridefinire il *momento generalizzato* p come

$$p := \frac{\partial L}{\partial \eta}(q, \eta, t). \quad (4.25)$$

Possiamo considerare la definizione di *mappa gradiente* della sezione 2.3 e riadattarla a questo contesto ponendo le seguenti identificazioni $f(x) = L(\cdot, \eta)$, $\xi = \varphi(x) = f_x(x) = \frac{\partial L}{\partial \eta}(q, \eta, t) = p$ individuando al posto di $\varphi(x)\Omega \rightarrow \Omega^*$ $\phi(x) = \xi$ un diffeomorfismo di $\Phi : U \rightarrow V$ tale che $\Phi(q, \eta, t) = (q, p, t)$. Supponendo che la sottomatrice $L_{\eta\eta}(q, \eta, t)$ abbia determinante non nullo in U ² allora possiamo risolvere rispetto ad η il sistema (4.25) producendo come soluzione $\eta = \alpha(q, p, t)$ ³ in un aperto $V \subseteq \mathbb{R}^{2l+1}$ e trovare il diffeomorfismo inverso $\Phi^{-1}(q, p, t) = (q, \alpha(q, p, t), t)$. Servendoci di quest' ultima relazione possiamo ridefinire l' Hamiltoniana su V come:

$$H(q, p, t) := p \cdot \alpha(q, p, t) - L(q, \alpha(q, p, t), t). \quad (4.26)$$

Ripetendo i ragionamenti fatti nella sezione 2.2 è possibile ricavare il seguente risultato simile a quello del teorema 2.5.

²condizione sufficiente per applicare il lemma 2.6 d'invertibilità globale al diffeomorfismo Φ in U

³relazione che se letta come funzione della variabile p : $\eta = \alpha(\cdot, p, t)$ coincide con $x = \psi(\xi)$

Proposizione 4.1. *Se $q(t)$ è una soluzione in U delle equazioni di Eulero-Lagrange $-\frac{d}{dt}L_\eta(q(t), \dot{q}(t), t) + L_q(q(t), \dot{q}(t), t) = 0$ in U , allora le $q(t)$ e $p(t) = L_\eta(q(t), \dot{q}(t), t)$ risolvono il sistema di $2l$ equazioni:*

$$\text{Eq. di Hamilton} \begin{cases} \dot{q}(t) = D_p H(q(t), p(t), t) \\ \dot{p}(t) = -D_q H(q(t), p(t), t) \end{cases} \quad (4.27)$$

ed inoltre in corrispondenza della soluzione di (4.27) vale la seguente proprietà

$$\frac{d}{dt}H(q(t), p(t), t) = \frac{\partial H}{\partial t}(q(t), p(t), t). \quad (4.28)$$

Viceversa se $H(q, p, t)$ definita in $V \subseteq \mathbb{R}^{2l+1}$ è sufficientemente regolare: $H_p \in C^1$, $H_{q,t} \in C^0$ e definire il sistema di equazioni:

$$\eta := \frac{\partial H}{\partial p}(q, p, t). \quad (4.29)$$

Possiamo definire il diffeomorfismo $\Psi : U \rightarrow V$ tale che $\Psi(q, p, t) = (q, \eta, t)$ e supponendo che $\det H_{pp}(q, p, t) \neq 0$ in V possiamo risolvere rispetto alla variabile p la relazione 4.29. Posta $p = \beta(q, \eta, t)$ tale soluzione possiamo ricavare il seguente risultato che risulta simmetrico rispetto a quello della proposizione 4.1.

Proposizione 4.2. *Se $(q(t), p(t))$ è una soluzione in V delle equazioni di Hamilton (4.27) di Hamiltoniana $H(q, p, t)$ allora $q(t)$ risolve il sistema di l equazione di Lagrange $-\frac{d}{dt}L_\eta(q(t), \dot{q}(t), t) + L_q(q(t), \dot{q}(t), t) = 0$ di Lagrangiana:*

$$L(q, \eta, t) := \eta \cdot \beta(q, \eta, t) - L(q, \beta(q, \eta, t), t). \quad (4.30)$$

4.3.1 Una formulazione del principio di Hamilton.

Ricordando quanto affermato nella sezione 2.2 riguardo il Principio di minima azione enunciato rispetto alla Lagrangiana e soddisfatto dalle soluzioni delle equazioni di Lagrange, poniamo una nuova formulazione dello

stesso tipo ma in funzione dell' Hamiltoniana. Consideriamo l' Hamiltoniana $H(q, p, t)$ definita sull' insieme V della precedente sezione e definiamo l'insieme delle dinamiche ammissibili \mathcal{F} in questo modo,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} := \{y : t \in [t_1, t_2] \rightarrow y(t) = (q(t), p(t)), \\ (q(t), p(t), t) \in V, y(t_1) = y_1, y(t_2) = y_2\}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

scegliendo i punti t_1, t_2, y_1, y_2 , in modo che \mathcal{F} sia non vuoto. Indicando con Y gli elementi dell'insieme \mathcal{F} , definiamo il funzionale d'azione associato alla formulazione Hamiltoniana:

$$\mathcal{A}(Y) := \int_{t_1}^{t_2} dt [p(t) \cdot \dot{q}(t) - H(q(t), p(t), t)]. \quad (4.32)$$

Proposizione 4.3. *Y è un punto di stazionarietà (o estrema) per \mathcal{A} se e solo se $q(t)$ e $p(t)$ soddisfano le equazioni di Hamilton (4.27) di Hamiltoniana H .*

Se un punto Y è una soluzione di tale sistema allora si dice che essa soddisfa il **principio di Hamilton**.

Poniamo quindi le definizioni necessarie alla trattazione delle trasformazioni canoniche.

Definizione 4.3. Trasformazioni canoniche

1. Siano (q, p, t) le variabili iniziali $(q, p, t) \in V \subseteq \mathbb{R}^{2l+1}$, e $(Q, P, t) \in W \subseteq \mathbb{R}^{2l+1}$ le variabili finali.
2. Sia $C : V \rightarrow W$ tale che $(Q, P, t) = (F(q, p, t), G(q, p, t), t) = C(q, p, t)$ una trasformazione **isocrona**. Supponiamo che la matrice jacobiana relativa alla trasformazione C abbia determinante non nullo rispetto ad ogni scelta di (q, p, t) in V .

3. Se $(q(t), p(t))$ è la traiettoria che ottimizza il principio di Hamilton rispetto all'Hamiltoniana H allora nelle nuove variabili, H' si esprimerà così: $H'(Q(t), P(t))$ con $Q(t) = F(q(t), p(t), t)$, $P(t) = G(q(t), p(t), t)$.

Una trasformazione C siffatta si dice **canonica**.

4. Se inoltre H , F e G non dipendono esplicitamente dal tempo t allora C è detta **completamente canonica**.

4.3.2 Struttura delle trasformazioni canoniche complete

Definiamo con \mathbf{C} la matrice jacobiana adottando le seguenti convenzioni: $y = (q, p)$, $H(q, p)$, $C = [F, G]$, $Y = [Q, P]$, $\nabla H = [H_q, H_p]$, $H^1(Q, P)$, $\nabla H' = [H'_Q, H'_P]$, $C_i^j = \frac{\partial C^j}{\partial y_i}$ con

$$\mathbf{C} = \nabla C = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial q} \\ \hline \frac{\partial G}{\partial p} & \frac{\partial G}{\partial q} \end{array} \right), \quad E := \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

Con queste definizioni, le equazioni (4.24) assumono la forma $\dot{y}(t) = E[\nabla H](y(t))$ e la matrice E acquista la proprietà $E^2 = -I$. Citiamo come primo risultato: una condizione sufficiente per l'esistenza di una trasformazione completamente canonica.

Proposizione 4.4. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una trasformazione sia **completamente canonica** è che*

$$\mathbf{C}^{-1} = -E\mathbf{C}^T E. \quad (4.34)$$

Una matrice \mathbf{C} del tipo (4.34) di ordine pari (in questo caso è $2l$) dice **simplettica**, ed inoltre notando che $\det E = \det[-E] = (-1)^l$ si ha che $\det [L]^2 = 1$.

Talvolta le trasformazioni Canoniche vengono presentate sotto un'altra definizione ossia la conservatività delle proprietà di una funzione, **le parentesi di Poisson** tra le vecchie e le nuove coordinate.

Definizione 4.4. Date due funzioni regolari $f(q, p)$, $g(q, p)$, si definisce parentesi di Poisson di f e g e si indica con il simbolo $\{f, g\}(q, p)$ la funzione:

$$\{f, g\}(q, p) := \sum_{i=1}^l [f_{q_i}(q, p)g_{p_i}(q, p) - f_{p_i}(q, p) \cdot g_{q_i}(q, p)]. \quad (4.35)$$

Secondo questa definizione equazioni di Hamilton possono scriversi nella forma

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}, \quad (4.36)$$

ed inoltre valgono le seguenti relazioni

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0. \quad (4.37)$$

Vale il seguente risultato dimostrabile a partire dalla relazione (4.34) che garantisce in altro criterio di identificazione di una trasformazione completamente canonica se definita a partire dalle relazioni $Q = F(q, p), P = G(q, p)$.

Proposizione 4.5. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una trasformazione sia completamente canonica è che :*

$$\{F_i, G_j\} = \delta_{ij}, \quad \{F_i, F_j\} = \{G_i, G_j\} = 0. \quad (4.38)$$

Se esprimiamo le relazioni (4.38) in funzioni rispetto alle variabili Q e P otteniamo le relazioni :

$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}, \quad \{Q_i, Q_j\} = \{P_i, P_j\} = 0. \quad (4.39)$$

Risulta giustificata l'affermazione secondo cui *una trasformazione canonica lascia invarianti le parentesi di Poisson della variabili q e p* . Questa affermazione è generalizzabile a qualunque coppia di variabili come dimostra la seguente proposizione.

Proposizione 4.6. *Date due funzioni regolari $f(q, p)$, $g(q, p)$, siano $\tilde{f}(Q, P) = f(C^{-1}(Q, P))$, $\tilde{g}(Q, P) = g(C^{-1}(Q, P))$ le loro rappresentazioni in termini delle variabili $(Q, P) = C(q, p) = (F(q, p), G(q, p))$. allora*

$$\{f, g\}(q, p) = \{\tilde{f}, \tilde{g}\}(C(q, p)) \quad (4.40)$$

I risultati fin qui citati saranno necessari per mostrare l'invarianza del principio di Hamilton rispetto alla trasformazione canonica e nella costruzione delle funzioni generatrici. Quest'ultime costituiranno un metodo di costruzione delle trasformazioni completamente canoniche in maniera implicita e faremo vedere come in certi casi soddisfano delle equazioni di Hamilton-Jacobi.

4.3.3 Funzioni generatrici

Prima di introdurre questo nuovo argomento conviene esprimere il principio di Hamilton nella veste delle forme differenziali. Il funzionale \mathcal{A} definito dalla (4.32) può essere scritto come:

$$\mathcal{A}(Y) := \int_{\mathcal{C}} \left[\sum_{i=1}^l p_i dq_i - H(q, p, t) dt \right] \quad (4.41)$$

dove \mathcal{C} rappresenta la curva di parametrizzazione $\{(q(t), p(t), t), t \in [t_1, t_2]\}$ a valori nell'insieme $V \subset \mathbb{R}^{2l+1}$ e l'espressione tra parentesi quadre è una forma differenziale su V . Supponiamo di avere un diffeomorfismo C di V in W C , di classe C^2 . Ad ogni elemento $Y \in \mathcal{F}$, indichiamo corrispondente

alla funzione $y(t) = (q(t), p(t))$ e definimo \mathcal{F}' l'immagine dell'insieme \mathcal{F} attraverso il diffeomorfismo C :

$$\mathcal{F}' = \{Y(t) = (Q(t), P(t) = C(y(t), t), t \in [t_1, t_2] : Y \in \mathcal{F}\}. \quad (4.42)$$

Chiaramente se C è una trasformazione canonica il principio di Hamilton implica che se Y è un punto estremale di \mathcal{A} allora il punto Y' corrispondente alla funzione $Y(t) = (C(y(t), t)$ sarà estremale per in funzionale \mathcal{A}' :

$$\mathcal{A}'(Y') := \int_{\mathcal{C}'} \left[\sum_{i=1}^l P_i dQ_i - H(Q, P, t) dt \right] \quad (4.43)$$

sull'insieme \mathcal{F}' , e con \mathcal{C}' la curva immagine di \mathcal{C} attraverso C . Confrontando le due rappresentazioni dell'integrale d'azione (4.32) ed (4.43) possiamo ricavare un criterio per verificare se una trasformazione è canonica rispetto ad H ed H' .

Proposizione 4.7. *Condizione sufficiente perchè una trasformazione C sia canonica rispetto alle Hamiltoniane $H(q, p, t)$ ed $H(Q, P, t)$ è che esista una funzione $R(q, p, t)$, su V tale che:*

$$\left[\sum_{i=1}^l p_i dq_i - H(q, p, t) dt \right] = \left[\sum_{i=1}^l P_i dQ_i - H(Q, P, t) dt \right] + dR(q, p, t) \quad (4.44)$$

cioè che le due forme differenziali $[pdq - Hdt]$ e $[PdQ - H'dt]$ differiscano per un differenziale esatto.

Questa proposizione suggerisce che per definire una trasformazione completamente canonica si può produrre un differenziale esatto che verifichi la (4.44), le *funzioni generatrici* consentono di trovare proprio questo differenziale. Si può dimostrare che data una funzione $S(u, v, t)$ su \mathbb{R}^{2l+1} di classe C^2 ($u, v \in \mathbb{R}^l$) tale che la matrice $\partial^2 S / \partial u \partial v$ abbia determinante diverso da zero

è possibile associarle una trasformazione canonica mettendo in corrispondenza u con p o q e v con Q o P . Una trasformazione S di questo tipo è detta **funzione generatrice della trasformazione canonica** ed in base alla scelta della variabili u tra p e q e v tra P o Q possibile individuare quattro differenti trasformazioni. A titolo esemplificativo mostriamo il caso della costruzione della funzione generatrice di una di queste quattro attraverso una proposizione.

Proposizione 4.8. *Sia $H(q,p,t)$ una funzione C^2 sull'aperto $V \in \mathbb{R}^{2l+1}$ e sia $S(q, Q, t)$ una funzione generatrice su \mathbb{R}^{2l+1} tale che*

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial Q_i}(q, Q, t) \right\} \neq 0, \quad \forall (q, Q, t) \in \mathbb{R}^{2l+1} \quad (4.45)$$

allora le equazioni:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial S}{\partial q_i}(q, Q, t) \\ P_i &= -\frac{\partial S}{\partial Q_i}(q, Q, t) \end{aligned} \quad (4.46)$$

definiscono (implicitamente) un diffeomorfismo C tra V ed un aperto W , tale che

$$H'(C(q, p, t), t) = H(q, p, t) + \frac{\partial S}{\partial t}(q, Q(q, p, t), t) \quad (4.47)$$

Dimostrazione. Il teorema del Dini garantisce che la prima delle (4.46) può essere risolta rispetto alla variabile Q per via della 4.45; chiamiamo $Q(q, p, t)$ la soluzione. Se si sostituisce quest'ultima funzione nel secondo membro della seconda delle (4.46) si ottiene $P = P(q, p, t)$ che accoppiata alla $Q(q, p, t)$ definisce in modo implicito una trasformazione C di V in $W = C(V)$ (per lo meno di classe C^1). Questa trasformazione è un diffeomorfismo in quanto la (4.45) anche la seconda delle (4.46) può essere risolta rispetto alle q in termini di una funzione $q(Q, P, t)$, che inserita nel secondo membro della prima delle (4.46) permette di ottenere anche la relazione $p(Q, P, t)$ (completando la

trasformazione inversa). Possiamo scegliere R in questo modo:

$$R(q, p, t) = S(q, Q(q, p, t), t) \quad (4.48)$$

Poichè R deve verificare la (4.44):

$$[pdq - Hdt] = [PdQ - H'dt] + \left[\frac{\partial S}{\partial q} dq + \frac{\partial S}{\partial Q} dQ + \frac{\partial S}{\partial t} dt = pdq - PdQ + \frac{\partial S}{\partial t} dt \right]^4 \quad (4.49)$$

otteniamo che S dovrà soddisfare la relazione:

$$H'(C(q, p, t), t) = H(q, p, t) + \frac{\partial S}{\partial t}(q, Q(q, p, t), t).$$

□

Risultati analoghi si hanno per altre scelte della variabili u, v ; citiamo il caso in cui $S(q, P, t)$ che sarà utile successivamente per legare funzioni generatrici alle equazioni di Hamilton-jacobi:

Proposizione 4.9. *Sia $H(q, p, t)$ una funzione C^2 sull'aperto $V \in \mathbb{R}^{2l+1}$ e sia $S(q, P, t)$ una funzione generatrice su \mathbb{R}^{2l+1} tale che*

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial P_i} (q, P, t) \right\} \neq 0, \quad \forall (q, P, t) \in \mathbb{R}^{2l+1} \quad (4.50)$$

allora le equazioni:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial S}{\partial q_i}(q, P, t) \\ Q_i &= \frac{\partial S}{\partial P_i}(q, P, t) \end{aligned} \quad (4.51)$$

definiscono (implicitamente) un diffeomorfismo C tra V ed un aperto W , tale che

$$H'(C(q, p, t), t) = H(q, p, t) + \frac{\partial S}{\partial t}(q, P(q, p, t), t) \quad (4.52)$$

⁴dove abbiamo usato le (4.46)

4.3.4 L'equazione di Hamilton-Jacobi

Supponiamo di porci il problema di cercare una trasformazione canonica tra le Hamiltoniana e $H(q, p, t)$ e $H'(Q, P, t)$ generata dalla funzione $S(q, P, t)$ definita nella proposizione 4.9 in modo tale che H' rispetto alle variabili Q e P risulti identicamente nulla. Questa circostanza porterebbe alla soluzione banale delle equazioni di Hamilton per la H' :

$$\begin{cases} \dot{Q}(t) = D_P H'(Q(t), P(t), t) = 0 \\ \dot{p}(t) = -D_Q H'(Q(t), P(t), t) = 0 \end{cases} \quad Q(t) = Q(t_0), P(t) = P(t_0). \quad (4.53)$$

Sempre dalla proposizione 4.9 si deduce che H' è verificata se e solo se l'Hamiltoniana soddisfa l'equazione di Hamilton-Jacobi dipendente dal tempo:

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial t}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (4.54)$$

Questo ci suggerisce un'altra applicazione delle equazioni di Hamilton-Jacobi affrontate nel corso della tesi.

Bibliografia

- [1] M. Giaquinta, S. Hildebrandt: *Calculus of Variation I, the Lagrangian Formalism*, Springer, Berlin 1995.
- [2] M. Giaquinta, S. Hildebrandt: *Calculus of Variation II, The Hamiltonian Formalism*, Springer, Berlin 1996.
- [3] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*, Am. Math. Soc. Providence RI, 1988.
- [4] P. Cannarsa, C. Sinestrari. *Semiconcave Functions, Hamilton-Jacobi Equations and Optimal Control*, Birkhäuser 2003.
- [5] I. Capuzzo Dolcetta, F. Dragoni *Corso di dottorato, Università La Sapienza di Roma, a.a. 2003, 2004.*
- [6] G. Benfatto, *Materiale didattico relativo al corso di Meccanica Analitica Università di Roma Torvergata a.a. 2006-2007.*
<http://www.mat.uniroma2.it/benfatto/>