



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE,
FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA

Curve interpolanti

Relatore: Prof. Alberto Alzati

ELABORATO FINALE DI
Federica Margherita SANDRI
Matr. 723786

ANNO ACCADEMICO 2011 - 2012

*A Lila, il mio angelo in terra
e a Uvi, tio Rafa e tio Monche, i miei angeli in cielo*

Indice

1	Preliminari: gli Spazi Euclidei	3
2	I primi metodi di interpolazione	9
2.1	L'interpolazione lineare	9
2.2	L'interpolazione polinomiale	14
2.2.1	L'agoritmo di Aitken	15
2.2.2	Interpolazione di Lagrange	17
2.2.3	Calcolo dell'errore	19
3	Le curve di Bézier	22
3.1	Algoritmo di de Casteljaou	22
3.2	I polinomi di Bernstein	26
3.3	Derivate delle curve di Bézier	32
3.4	Innalzamento di grado	37
3.5	Proprietà di suddivisione	39
4	Polinomi interpolanti di Hermite	47
4.1	Polinomi di Hermite di grado 3	47
4.2	Polinomi di Hermite di grado 5	53
5	Le spline di Bézier	57
5.1	Condizioni di differenziabilità	58
5.1.1	Condizione di incollamento \mathcal{C}^1	60
5.1.2	Condizione di incollamento \mathcal{C}^2	62
5.1.3	Continuità geometrica	67
5.2	Spline di Bézier quadratica di tipo \mathcal{C}^1	69
5.3	Spline di Bézier cubica di tipo \mathcal{C}^2	70
6	Interpolazione mediante spline	73
6.1	Spline cubiche di tipo \mathcal{C}^1	73

6.1.1	Problema di interpolazione I: Metodo di Hermite . . .	73
6.1.2	Problema di interpolazione II	74
6.2	Spline cubiche di tipo C^2	80
6.2.1	Le spline cubiche di tipo C^2 e l'interpolazione di Hermite	85
6.2.2	Vari tipi di condizioni agli estremi	88
6.2.3	Vari tipi di scelte dei nodi	93

Introduzione

Lo scopo di questo elaborato è quello di analizzare e mettere a confronto diversi metodi per risolvere problemi di interpolazione di punti in uno spazio euclideo \mathbb{E}^3 . Questi tipi di problemi possono essere affrontati da due punti di vista:

- 1) Dati $n+1$ punti $P_i \in \mathbb{E}^3$, e $n+1$ valori $t_i \in [\alpha, \beta]$, trovare una funzione $\Phi : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ tale che:

$$(0.0.1) \quad \Phi(t_i) = P_i \quad \forall i = 0, \dots, n.$$

La funzione $\Phi(t)$ prende il nome di *funzione interpolante*.

- 2) Data una funzione $g(t)$ definita in \mathbb{R} a valori in \mathbb{R}^3 di cui conosciamo $n+1$ punti del grafico $(t_i, g(t_i))$, trovare una funzione $\Phi(t)$, il cui grafico passi per i punti dati, di caratteristiche note, che, in base a certi criteri fissati, la approssimi (in generale si cerca una $\Phi(t)$ di tipo polinomiale).

Il primo tipo di problema si incontra frequentemente nell'analisi di un certo fenomeno fisico, di cui però non si conosce un modello matematico. Invece il secondo tipo si incontra quando si vuole studiare una funzione di cui non si conosce un'espressione analitica, e si vuole approssimarla con una più semplice, in particolar modo di tipo polinomiale.

Dopo aver richiamato alcune proprietà degli spazi euclidei nel capitolo 1, nel capitolo 2 introduciamo due metodi di interpolazione. Il primo, presentato nel paragrafo 2.1, è l'interpolazione lineare, che come vedremo è sicuramente la più semplice da determinare (è quella che richiede il minor numero di calcoli) ma è poco regolare e poco precisa, come si può vedere dalle Figure 2.1, 2.2 e 2.3. Nel paragrafo seguente presenteremo il metodo di interpolazione polinomiale, e dopo aver dimostrato che esiste ed è unica una funzione interpolante che risolva il problema, presenteremo due modi per determinarla: il primo di tipo ricorsivo, l'algoritmo di Aitken, il secondo invece diretto, che

sfrutta i polinomi di Lagrange. Vedremo che l'interpolazione polinomiale per sua natura risolve i problemi di scarsa regolarità della funzione interpolante lineare, ma ha un altro difetto, quello di essere ottimale solo per gradi molto bassi, quindi quando esistono solo pochi punti da interpolare. Quando i punti sono parecchi, c'è il rischio che la funzione possa presentare delle oscillazioni impreviste, il così detto fenomeno di Runge, come è illustrato nell'esempio di Figura 2.4.

Il terzo e ultimo metodo che presenteremo sarà quello che sfrutta le curve spline, in particolar modo le spline di Bézier. Tali curve sono opportuni incollamenti di curve di Bézier (introdotte e analizzate nel capitolo 3). Questo tipo di soluzione per un problema di interpolazione è ottimale, sia per la regolarità delle curve di Bézier che si usano, sia soprattutto per la caratteristica propria delle spline di permettere un controllo locale, ovvero la possibilità di cambiare la posizione di un punto da interpolare senza dover modificare tutta la curva. Nel capitolo 5 abbiamo descritto alcune alternative per la costruzione delle suddette spline. Infine nel capitolo 6 abbiamo risolto diversi problemi di interpolazione mediante le spline di tipo \mathcal{C}^1 e \mathcal{C}^2 , dove questi simboli indicano la classe di differenziabilità delle spline. Sempre nel capitolo 6 abbiamo inoltre mostrato come la risoluzione di un problema di interpolazione può essere ricondotto alla risoluzione di un sistema lineare di equazioni molto particolare, perchè la matrice rappresentativa del sistema è tridiagonale con diagonale dominante, permettendo così di risolvere il sistema mediante algoritmi conosciuti come il metodo di eliminazione di Gauss-Seidel.

Come si evince dal capitolo 4, ci sono inoltre problemi di interpolazione in cui non vengono solo assegnati i punti da interpolare, ma possono essere avanzate delle richieste aggiuntive come per esempio il fissare i vettori tangenti alla curva interpolante nei punti da interpolare; abbiamo risolto questo tipo di problema di interpolazione tramite i polinomi di Hermite.

Nella parte finale dell'elaborato ci siamo concentrati sulle condizioni che si possono porre nei punti iniziali e finale da interpolare, e sull'influenza che nelle spline interpolanti è esercitata dalla scelta dei *nodi*, particolari valori di $[\alpha, \beta]$ da cui dipende la spline.

Vogliamo infine avvisare il lettore, che per problemi tipografici, molte delle figure inserite nell'elaborato hanno diverse unità di misura sulle ascisse e sulle ordinate.

Capitolo 1

Preliminari: gli Spazi Euclidei

Definizione 1.0.1. Si dice *spazio vettoriale euclideo* uno spazio vettoriale \mathcal{V} su \mathbb{R} dotato di un prodotto interno

$$(1.0.1) \quad \begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \mathcal{V} \times \mathcal{V} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\rightarrow [\vec{u}, \vec{v}] \end{aligned}$$

tale che $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ valgano

- i) $[\vec{u}, \vec{v}] = [\vec{v}, \vec{u}]$
- ii) $[\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{w}] + [\vec{v}, \vec{w}]$
- iii) $[\lambda \vec{u}, \vec{v}] = \lambda [\vec{u}, \vec{v}]$
- iv) $[\vec{u}, \vec{u}] \geq 0$ e $[\vec{u}, \vec{u}] = 0 \iff \vec{u} = 0$

Definizione 1.0.2. Una *norma* su uno spazio vettoriale \mathcal{V} è una funzione:

$$(1.0.2) \quad \begin{aligned} \|\cdot\| : \mathcal{V} &\rightarrow [0, \infty) \\ \vec{u} &\rightarrow \|\vec{u}\| \end{aligned}$$

tale che $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ valgano

- i) $\|\vec{u}\| \geq 0$ e $\|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = 0$
- ii) $\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$
- iii) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \geq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Uno spazio vettoriale \mathcal{V} munito di una norma è detto *spazio normato*.

Osservazione 1.0.1. In questo elaborato considereremo come spazio vettoriale \mathbb{R}^n e il suo prodotto interno sarà il prodotto scalare così definito:

$$(1.0.3) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

dove $(x_i)_{i=1, \dots, n}$ e $(y_i)_{i=1, \dots, n}$ sono le coordinate dei vettori \vec{u} e \vec{v} rispettivamente (vedi in seguito osservazione 1.0.3). Questo prodotto interno induce naturalmente una norma così definita:

$$(1.0.4) \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$

Definiamo anche una condizione di perpendicolarità tra vettori:

Definizione 1.0.3. Diciamo che due vettori $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ sono *perpendicolari* o *ortogonali* se $[\vec{u}, \vec{v}] = 0$.

Definizione 1.0.4. \mathcal{S} è uno *spazio affine* se \mathcal{S} è un insieme per cui esiste un'azione di \mathcal{V} su \mathcal{S} , cioè un'applicazione

$$(1.0.5) \quad \begin{aligned} \oplus : \mathcal{S} \times \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{S} \\ (P, \vec{v}) &\rightarrow Q = P \oplus \vec{v} \end{aligned}$$

tale che valgano

- i) $\forall P, Q \in \mathcal{S} \quad \exists! \vec{v} \in \mathcal{V}$ tale che $P \oplus \vec{v} = Q$
- ii) $\forall P \in \mathcal{S} \quad P \oplus \vec{0} = P$ dove $\vec{0}$ è il vettore nullo
- iii) se $P \oplus \vec{v} = Q$ e $Q \oplus \vec{w} = R \Rightarrow P \oplus (\vec{v} + \vec{w}) = R$

Lo spazio vettoriale \mathcal{V} è detto *spazio vettoriale direttore*. Se $\dim \mathcal{V} = n$, \mathcal{S} è detto *spazio affine di dimensione n su \mathbb{R}* . Ogni $P \in \mathcal{S}$ viene detto *punto* e ogni $v \in \mathcal{V}$ viene detto *vettore*.

Osservazione 1.0.2. Per la proprietà i) spesso il vettore \vec{v} viene denotato come il vettore differenza tra P e Q , ovvero $\vec{v} = Q - P$, inoltre vale la seguente proprietà se $P \oplus \vec{v} = Q \Rightarrow Q \oplus (-\vec{v}) = P$.

Definizione 1.0.5. Si dice *spazio (affine) euclideo* \mathbb{E}^n uno spazio affine di dimensione n su \mathbb{R} tale che lo spazio vettoriale direttore \mathcal{V} sia uno spazio euclideo.

In questo elaborato noi considereremo principalmente gli spazi affini \mathbb{E}^2 ed in particolare \mathbb{E}^3 . Ora per determinare la posizione di un punto nello spazio affine considerato, dobbiamo fissare un sistema di riferimento.

Definizione 1.0.6. Definiamo *sistema di riferimento* di uno spazio affine \mathcal{S} un insieme

$$(1.0.6) \quad \mathcal{R} = \{O \in \mathcal{S}, \quad \mathcal{B} = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}\}$$

dove O è detto *origine* e \mathcal{B} è una base di \mathcal{V} , ovvero una insieme di n vettori linearmente indipendenti che generano lo spazio \mathcal{V} .

Osservazione 1.0.3. Il sistema di riferimento \mathcal{R} induce una biezione

$$(1.0.7) \quad \begin{aligned} \mathcal{S} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ P &\rightarrow (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

ovvero per la proprietà i) della 1.0.4

$$(1.0.8) \quad P \rightarrow P - O = \vec{v} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{a}_i \rightarrow (x_i)_{i=1, \dots, n}.$$

La (x_1, \dots, x_n) indica la n -upla delle coordinate di P nel sistema di riferimento \mathcal{R}

Prima di andare avanti ad analizzare il concetto di sistema di riferimento, introduciamo un concetto che useremo più volte all'interno dell'elaborato: il prodotto vettoriale, che definiremo in particolare per lo spazio vettoriale \mathbb{R}^3 (lo spazio direttore di \mathbb{E}^3).

Definizione 1.0.7. Dati due vettori $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3$ chiamiamo *prodotto vettoriale* l'operatore così definito:

$$(1.0.9) \quad \vec{v} \wedge \vec{u} = \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \vec{a}_3 - \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} \vec{a}_2 + \det \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} \vec{a}_1$$

dove $(x_i)_{i=1,2,3}$ e $(y_i)_{i=1,2,3}$ sono le coordinate dei vettori \vec{v} e \vec{u} rispetto al sistema di riferimento $\mathcal{R} = \{O \in \mathbb{E}^3, \quad \mathcal{B} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}\}$.

Tornando ora ad analizzare il concetto di sistema di riferimento, in generale si utilizzano sistemi di riferimento con una *base ortonormale*, ovvero una base composta da vettori a due a due ortogonali e tali che ogni vettore abbia norma 1. Il più utilizzato è il sistema di riferimento cartesiano. Ma in questo elaborato sfrutteremo principalmente sistemi di riferimento dati da

basi non ortonormali.

Consideriamo quindi in \mathbb{E}^2 un triangolo non degenere di vertici P_1, P_2 e P_3 . Allora un generico punto P appartiene al triangolo se esistono $\nu, \lambda, \mu \in \mathcal{V}$, con $\nu, \lambda, \mu \geq 0$, tali che

$$(1.0.10) \quad \begin{cases} P = \nu P_1 + \lambda P_2 + \mu P_3 \\ \nu + \lambda + \mu = 1 \end{cases}$$

Il vettore (ν, λ, μ) indica le coordinate baricentriche del punto P , rispetto ai punti P_1, P_2 e P_3 .

Osservazione 1.0.4. Le coordinate baricentriche derivano dal sistema di riferimento $\mathcal{R} = \{P_1, \{P_2 - P_1, P_3 - P_1\}\}$, e (λ, μ) sono le coordinate di P in questo sistema di riferimento, dove $P - P_1 = \lambda(P_2 - P_1) + \mu(P_3 - P_1)$. Considerando $\lambda, \mu \geq 0$ e $0 \leq \lambda + \mu \leq 1$, e ponendo poi $\nu = 1 - \lambda - \mu$ otteniamo la prima di (1.0.10).

Vediamo ora come passare dalle coordinate cartesiane a quelle baricentriche: siano (x_i, y_i) le coordinate cartesiane di P_i con $i = 1, 2, 3$ e (x, y) le coordinate di P . Allora il sistema (1.0.10) può essere scritto in forma matriciale come:

$$(1.0.11) \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu \\ \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A questo punto affinché la relazione tra coordinate cartesiane e baricentriche sia biunivoca, la matrice A rappresentativa del sistema deve essere non singolare. Ma il determinante di questa matrice è esattamente l'area del triangolo, infatti è noto che

$$(1.0.12) \quad \text{area}(P_1, P_2, P_3) = \frac{1}{2} \|(P_2 - P_1) \wedge (P_3 - P_1)\| = A.$$

Quindi è nullo se e solo se i tre punti sono allineati, fatto che abbiamo escluso a priori. A questo punto abbiamo anche un metodo diretto per ricavare ν, λ e μ , infatti applicando la regola di Cramer per sistemi lineari otteniamo che:

$$(1.0.13) \quad \nu = \frac{\text{area}(P, P_2, P_3)}{\text{area}(P_1, P_2, P_3)} \quad \lambda = \frac{\text{area}(P_1, P, P_3)}{\text{area}(P_1, P_2, P_3)} \quad \mu = \frac{\text{area}(P_1, P_2, P)}{\text{area}(P_1, P_2, P_3)}.$$

Possiamo quindi generalizzare questo discorso: nello spazio affine E^n consideriamo un semplice di vertici P_1, \dots, P_{n+1} . Consideriamo poi il sistema di riferimento $\mathcal{R} = \{P_1, \{P_2 - P_1, \dots, P_{n+1} - P_1\}\}$, dove un generico punto P ha coordinate $(\mu_2, \dots, \mu_{n+1})$.

Definizione 1.0.8. Definiamo *coordinate baricentriche* del punto P , rispetto a P_1, \dots, P_{n+1} , il vettore $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n+1})$, dove $\mu_1 = 1 - \mu_2 - \dots - \mu_{n+1}$

Osservazione 1.0.5. I punti con coordinate non negative sono tutti e soli i punti del semplice, e precisamente se le coordinate sono tutte strettamente positive sono punti interni al semplice.

Ricordiamo infine che dato un sistema di riferimento \mathcal{R} , una *affinità* ϕ di \mathbb{E}^n è una mappa di \mathbb{E}^n in sé che agisce sulle coordinate dei punti nel seguente modo:

$$(1.0.14) \quad \vec{x} \rightarrow \phi(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{c}$$

dove A è la matrice rappresentativa di una applicazione lineare $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ rispetto alla base scelta per \mathcal{R} ed è tale che $\det(A) \neq 0$ e $\vec{c} \in \mathcal{V}$.

Osservazione 1.0.6. Le trasformazioni affini conservano le coordinate baricentriche. Dimostriamolo per \mathbb{E}^2 attraverso alcune considerazioni:

- Un'affinità manda triangoli in triangoli.
- Siano P_1, P_2 e P_3 i vertici di un triangolo. Allora come è già stato ricordato prima $area(P_1, P_2, P_3) = \frac{1}{2} \|(P_2 - P_1) \wedge (P_3 - P_1)\|$. Siano poi $P'_i = \phi(P_i)$ le immagini di P_i tramite una affinità ϕ . Allora $area(P'_1, P'_2, P'_3) = |\det(A)| area(P_1, P_2, P_3)$ (dove il segno di $\det(A)$ ci dice se c'è stato un cambiamento di orientazione). Infatti:

$$\begin{aligned} area(P'_1, P'_2, P'_3) &= \frac{1}{2} \|(P'_2 - P'_1) \wedge (P'_3 - P'_1)\| \\ &= \frac{1}{2} \|(\phi(P_2) - \phi(P_1)) \wedge (\phi(P_3) - \phi(P_1))\| \\ &= \frac{1}{2} \|A(P_2 - P_1) \wedge A(P_3 - P_1)\| \\ &= \frac{1}{2} |\det(A)| \|(P_2 - P_1) \wedge (P_3 - P_1)\| \\ &= |\det(A)| area(P_1, P_2, P_3) \end{aligned}$$

dove con la notazione $A(P_i - P_j)$ intendiamo l'applicazione della matrice A sulle coordinate del vettore $P_i - P_j$.

- Consideriamo ora un generico punto P e le sue coordinate baricentriche (ν, λ, μ) rispetto a P_1, P_2 e P_3 . Dimostriamo quindi l'uguaglianza per la prima coordinata, per le altre si procede analogamente. Sappiamo già che:

$$\nu = \frac{\text{area}(P, P_1, P_2)}{\text{area}(P_1, P_2, P_3)}.$$

Sia poi $\phi(P) = P'$. Calcoliamo quindi la prima coordinata baricentrica di P' rispetto P'_1, P'_2 e P'_3 :

$$\begin{aligned} \nu' &= \frac{\text{area}(P', P'_1, P'_2)}{\text{area}(P'_1, P'_2, P'_3)} \\ &= \frac{|\det(A)| \text{area}(P, P_1, P_2)}{|\det(A)| \text{area}(P_1, P_2, P_3)} \\ &= \frac{\text{area}(P, P_1, P_2)}{\text{area}(P_1, P_2, P_3)} = \nu \end{aligned}$$

Capitolo 2

I primi metodi di interpolazione

2.1 L'interpolazione lineare

Il più semplice esempio di interpolazione è l'interpolazione lineare. Incominciamo a considerare due punti P_1 e P_2 di \mathbb{E}^3 , allora

$$(2.1.1) \quad x(t) = (1-t)P_1 + tP_2 \quad \text{con } t \in [0, 1]$$

rappresenta il segmento di estremi P_1 e P_2 .

Osservazione 2.1.1. Valgono le seguenti proprietà:

- le coordinate dei punti di ogni segmento di estremi P_1 e P_2 sono invarianti per trasformazioni affini, infatti tutti i punti del segmento sono definiti mediante le loro coordinate baricentriche rispetto a P_1 e P_2 , che per l'osservazione 1.0.6 sono invarianti per affinità. Quindi data una affinità ϕ di \mathbb{E}^3 vale:

$$(2.1.2) \quad \phi(x(t)) = (1-t)\phi(P_1) + t\phi(P_2) \quad \forall t \in [0, 1];$$

- ogni segmento è invariante per trasformazioni affini del dominio, infatti se consideriamo l'affinità $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [0, 1]$ così definita:

$$\phi(t) = \frac{t - \alpha}{\beta - \alpha}$$

allora

$$x(\phi(t)) = \frac{\beta - t}{\beta - \alpha}P_1 + \frac{t - \alpha}{\beta - \alpha}P_2$$

è ancora lo stesso segmento di estremi P_1 e P_2 .

Ora dati $n + 1$ punti $P_i \in \mathbb{E}^3$, e $n + 1$ valori distinti $t_i \in \mathbb{R}$, la funzione interpolante tramite interpolazione lineare è semplicemente la funzione definita a tratti, dove ogni tratto è definito sull'intervallo $[t_i, t_{i+1}]$, tale che per ogni coppia di punti consecutivi P_i e P_{i+1} il grafico è il segmento congiungente P_i e P_{i+1} , ovvero:

$$(2.1.3) \quad f(t) = \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} P_i + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} P_{i+1} \quad \text{se } t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Osservazione 2.1.2. Vediamo alcune proprietà di questa funzione interpolante:

- è chiaramente molto semplice da definire;
- ma è poco regolare, infatti in generale in corrispondenza dei nodi t_i non è derivabile.

Fino ad ora abbiamo considerato il problema dell'interpolazione dal primo punto di vista. Consideriamolo ora dal secondo: sia $g : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$, e siano $t_i \in [\alpha, \beta]$ $n + 1$ valori tali che $t_0 = \alpha$ e $t_n = \beta$. Dati quindi i punti $P_i = g(t_i)$, sia $f(t)$ la funzione interpolante dei punti P_i con nodi t_i . Allora vale la seguente proposizione:

Proposizione 2.1.1. *La funzione interpolante $f(t)$ ha la proprietà detta variation diminishing, ovvero dato un generico piano π , allora il numero di punti di intersezione tra $f(t)$ e π è sempre minore o uguale al numero di punti di intersezione tra $g(t)$ e π .*

Dimostrazione. È una ovvia conseguenza del fatto che un segmento può avere con un generico piano al più 1 punto di intersezione, invece il grafico di una generica funzione può averne di più. \square

Inoltre l'interpolazione lineare è poco precisa, infatti vale la seguente proposizione, di cui rimandiamo la dimostrazione alla sezione 2.2.3 (osservazione 2.2.7), perchè si tratta di un caso particolare dell'errore dell'interpolazione polinomiale (teorema 2.2.2):

Proposizione 2.1.2. *Data $g : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$, che supponiamo essere due volte differenziabile in $[\alpha, \beta]$, e la funzione interpolante $f(t)$ nei nodi t_i come sopra, allora se $t \in [t_i, t_{i+1}]$*

$$(2.1.4) \quad |f(t) - g(t)| \leq C(t_{i+1} - t_i)^2$$

dove

$$(2.1.5) \quad C = \frac{1}{8} \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} |g''(t)|.$$

Dunque l'errore aumenta con il quadrato della distanza dei nodi. Un esempio ci ciò lo possiamo vedere nelle Figure 2.1, 2.2 e 2.3 dove abbiamo interpolato la funzione $g(t) = \sin(t)$ definita sull'intervallo $[0, 2\pi]$ rispettivamente con 5, 10 e 15 nodi equidistanti sull'asse delle t .

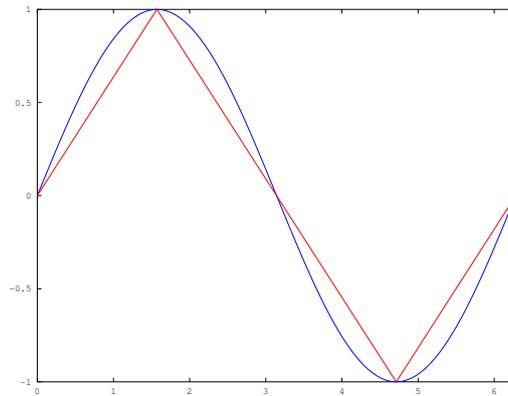


Figura 2.1: 5 nodi

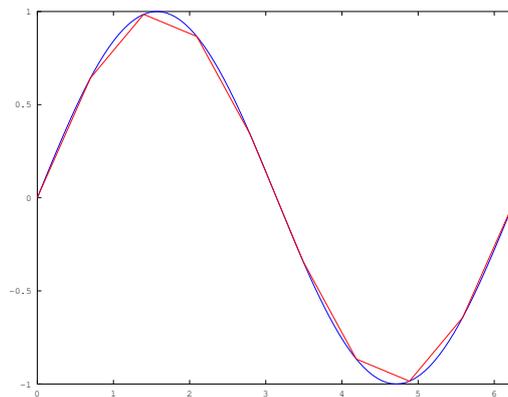


Figura 2.2: 10 nodi

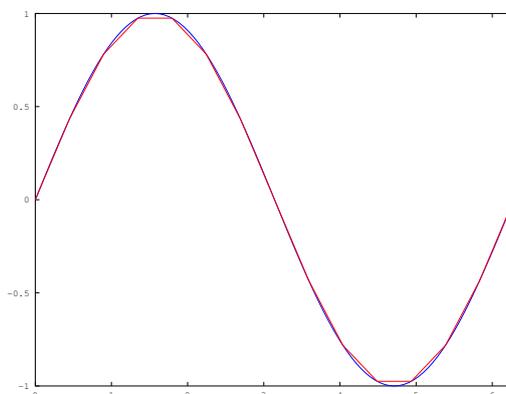


Figura 2.3: 15 nodi

Il teorema di Menelao

L'interpolazione lineare si può usare per dimostrare un teorema di geometria attribuito a Menelao di Alessandria.

Definizione 2.1.1. Definiamo il *rapporto semplice* tra tre punti allineati P_1 , P_2 e P_3

$$(2.1.6) \quad r(P_1, P_2, P_3) = \frac{P_2 - P_1}{P_3 - P_2}$$

Osservazione 2.1.3. In realtà in questa definizione abbiamo fatto un abuso di notazione. Infatti qui e ogni volta che parleremo di rapporto semplice con P_i intenderemo le coordinate del punto rispetto ad un sistema di riferimento affine definito sulla retta che contiene i tre punti.

Teorema 2.1.1 (Il teorema di Menelao).

Dati tre punti non allineati P_1 , P_2 e P_3 , siano

$$\begin{aligned} A_t &= (1-t)P_1 + tP_2 \\ A_s &= (1-s)P_1 + sP_2 \\ B_t &= (1-t)P_2 + tP_3 \\ B_s &= (1-s)P_2 + sP_3 \end{aligned}$$

con $t, s \in (0,1)$, e $t \neq s$. Chiamato C il punto di intersezione tra i segmenti $\overline{A_t B_t}$ e $\overline{A_s B_s}$, allora

$$(2.1.7) \quad r(A_t, C, B_t) = \frac{s}{1-s} \quad e \quad r(A_s, C, B_s) = \frac{t}{1-t}.$$

Dimostrazione. La dimostrazione deriva dalla semplice osservazione che C soddisfa le seguenti equazioni

$$(2.1.8) \quad C = (1-s)A_t + sB_t \quad \text{e} \quad C = (1-t)A_s + tB_s.$$

Infatti cerchiamo $h, k \in (0, 1)$ tali che

$$(2.1.9) \quad (1-h)A_t + hB_t = (1-k)A_s + kB_s$$

quindi, sostituendo alla (2.1.9) le coordinate di A_t, B_t, A_s e B_s , otteniamo la seguente relazione:

$$(2.1.10) \quad ((t-1)h + (1-s)k - t + s)P_1 + ((1-2t)h + (2s-1)k + t - s)P_2 + (ht - ks)P_3 = 0.$$

Poiché i punti P_1, P_2 e P_3 non sono allineati la (2.1.10) è possibile solo se i coefficienti di P_1, P_2 e P_3 sono nulli, quindi il nostro problema si riduce a risolvere il sistema lineare:

$$(2.1.11) \quad \begin{cases} (t-1)h + (1-s)k = t-s \\ (1-2t)h + (2s-1)k = s-t \\ th - sk = 0 \end{cases}$$

Osserviamo dunque che

$$\text{rk} \begin{bmatrix} t-1 & 1-s \\ 1-2t & 2s-1 \\ t & -s \end{bmatrix} = \text{rk} \begin{bmatrix} t-1 & 1-s & t-s \\ 1-2t & 2s-1 & s-t \\ t & -s & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

Infatti

$$\det \begin{bmatrix} t-1 & 1-s & t-s \\ 1-2t & 2s-1 & s-t \\ t & -s & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} t-1 & 1-s \\ 1-2t & 2s-1 \end{bmatrix} = t-s \neq 0.$$

Quindi per il teorema di Rouché Capelli il sistema (2.1.11) ha una soluzione unica, ed è equivalente al sistema

$$(2.1.12) \quad \begin{cases} (t-1)h + (1-s)k = t-s \\ (1-2t)h + (2s-1)k = s-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = s \\ k = t \end{cases}.$$

Infine la tesi si ottiene con dei semplici passaggi algebrici:

$$\begin{aligned} r(A_t, C, B_t) &= \frac{C - A_t}{B_t - C} \\ &= \frac{(1-s)A_t + sB_t - A_t}{B_t - (1-s)A_t + sB_t} \\ &= \frac{s(B_t - A_t)}{(1-s)(B_t - A_t)} \\ &= \frac{s}{1-s}. \end{aligned}$$

Analogamente si dimostra la seconda parte della (2.1.7). \square

2.2 L'interpolazione polinomiale

Per cercare di risolvere i problemi presentati nell'interpolazione lineare è possibile usare come funzione interpolante una funzione polinomiale, che per sua natura è continua e infinitamente derivabile. Inoltre vale il seguente teorema:

Teorema 2.2.1. *Dati $n + 1$ punti $P_i \in \mathbb{E}^3$, con i rispettivi nodi $t_i \in \mathbb{R}$, se $t_i \neq t_j \forall i \neq j$ esiste un'unica funzione polinomiale*

$$(2.2.1) \quad p_n(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n$$

di grado al più n , tale che

$$(2.2.2) \quad p_n(t_i) = P_i \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Dimostrazione. Cerchiamo i vettori $a^j = [a_0^j, a_1^j, \dots, a_n^j]^T$, con $j = 1, 2, 3$, definiti a partire dai vettori $a_i = [a_i^1, a_i^2, a_i^3]^T$, con $i = 0, \dots, n$, che a loro volta definiscono la funzione $p_n(t)$ che stiamo cercando. Consideriamo poi i vettori $p^j = [p_0^j, p_1^j, \dots, p_n^j]^T$, con $j = 1, 2, 3$, dove (p_i^1, p_i^2, p_i^3) sono le coordinate del punto P_i , con $i = 0, \dots, n$. Infine consideriamo la matrice V , detta *matrice di Vandermonde*, così definita:

$$(2.2.3) \quad v_{kh} = t_{k-1}^{n-h+1} \quad k = 1, \dots, n+1 \quad h = 1, \dots, n+1.$$

Imponendo poi le condizioni date dalla (2.2.2) otteniamo tre sistemi lineari di $n + 1$ equazioni in $n + 1$ incognite

$$(2.2.4) \quad V a^j = p^j \quad \text{per } j = 1, 2, 3.$$

Osserviamo che la matrice V è non singolare in quanto il suo determinante è

$$(2.2.5) \quad \det(V) = \prod_{\substack{k,h=0 \\ k < h}}^n (t_k - t_h) \neq 0$$

per l'ipotesi che i nodi t_i sono tutti distinti. Allora i sistemi (2.2.4) hanno una soluzione unica, di conseguenza anche i vettori

$$(2.2.6) \quad a^j = V^{-1}p^j$$

esistono e sono unici. Quindi la funzione $p_n(t)$ esiste ed è unica. \square

Osservazione 2.2.1. Possiamo osservare che la dimostrazione ci fornisce già un metodo diretto per trovare la funzione interpolante, ovvero la risoluzione dei sistemi (2.2.4).

2.2.1 L'algoritmo di Aitken

Un metodo alternativo per trovare la funzione interpolante è usare un algoritmo iterativo detto *algoritmo di Aitken*. Usiamo una sequenza di ripetute interpolazioni lineari, partendo da quelle seguenti così:

$$(2.2.7) \quad p_i^0(t) = \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} P_i + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} P_{i+1} \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Poi si procede per induzione sul numero $n+1$ dei punti da interpolare. Se $n=1$ si usa direttamente la (2.2.7). Supponiamo ora che la funzione p_0^{n-1} sia quella unica che interpola i primi $(n-1)+1$ punti P_0, \dots, P_{n-1} , e che la funzione p_1^{n-1} sia quella unica che interpola gli ultimi n punti P_1, \dots, P_n , in base al teorema 2.2.1. A questo punto è facile trovare la funzione che interpola tutti gli $n+1$ punti dati:

$$(2.2.8) \quad p(t) = p_0^n(t) = \frac{t_n - t}{t_n - t_0} p_0^{n-1}(t) + \frac{t - t_0}{t_n - t_0} p_1^{n-1}(t).$$

Osservazione 2.2.2. È immediato verificare che la funzione $p_n(t)$ così ottenuta interpola effettivamente i punti dati. Infatti

$$\begin{aligned} p(t_0) = p_0^n(t_0) &= \frac{t_n - t_0}{t_n - t_0} p_0^{n-1}(t_0) + \frac{t_0 - t_0}{t_n - t_0} p_1^{n-1}(t_0) \\ &= p_0^{n-1}(t_0) = P_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(t_n) = p_0^n(t_n) &= \frac{t_n - t_n}{t_n - t_0} p_0^{n-1}(t_n) + \frac{t_n - t_0}{t_n - t_0} p_1^{n-1}(t_n) \\ &= p_1^{n-1}(t_n) = P_n \end{aligned}$$

per le ipotesi fatte su p_0^{n-1} e p_1^{n-1} . Inoltre sempre per le stesse ipotesi abbiamo che

$$p_0^{n-1}(t_i) = p_1^{n-1}(t_i) = P_i \quad \text{per } i = 1, \dots, n-1.$$

Quindi otteniamo che

$$\begin{aligned} p(t_i) = p_0^n(t_i) &= \frac{t_n - t_i}{t_n - t_0} p_0^{n-1}(t_i) + \frac{t_i - t_0}{t_n - t_0} p_1^{n-1}(t_i) \\ &= \frac{t_n - t_i + t_i - t_0}{t_n - t_0} P_i \\ &= P_i \end{aligned}$$

per $i = 1, \dots, n-1$.

È facile ora ricavare i passi intermedi dell'algoritmo di Aitken

$$(2.2.9) \quad p_i^r(t) = \frac{t_{i+r} - t}{t_{i+r} - t_i} p_i^{r-1}(t) + \frac{t - t_i}{t_{i+r} - t_i} p_{i+1}^{r-1}(t)$$

per $r = 1, \dots, n$ e $i = 0, \dots, n-r$.

Osservazione 2.2.3. Dal precedente algoritmo di Aitken (2.2.9) possiamo dedurre alcune proprietà della funzione interpolante (2.2.1):

- conservazione delle coordinate per trasformazioni affini: infatti l'algoritmo di Aitken, essendo una successione di interpolazioni lineari, in base all'osservazione 2.1.1, mantiene inalterate le coordinate baricentriche. Quindi data una affinità ϕ di \mathbb{E}^3 , $\forall r = 1, \dots, n$ e $\forall i = 0, \dots, n-r$, vale:

$$(2.2.10) \quad \phi(p_i^r(t)) = \frac{t_{i+r} - t}{t_{i+r} - t_i} \phi(p_i^{r-1}(t)) + \frac{t - t_i}{t_{i+r} - t_i} \phi(p_{i+1}^{r-1}(t))$$

in quanto $\forall i = 0, \dots, n-1$ vale:

$$(2.2.11) \quad \phi(p_i^0(t)) = \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} \phi(P_i) + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \phi(P_{i+1}).$$

Ne segue che la funzione interpolante viene trasformata da una affinità ϕ nella funzione interpolante dei punti trasformati $\phi(P_i)$;

- precisione lineare: se i punti P_i sono allineati ed equidistanti tutte le funzioni $p_i^r(t)$, con $r = 0, \dots, n$, hanno come supporto un segmento, anche se la parametrizzazione non sarà lineare. Senza perdita di generalità dimostriamo questo fatto per $n = 2$. Visto che i punti sono allineati ed equidistanti avremo le seguenti relazioni:

$$(2.2.12) \quad \begin{cases} P_0 \\ P_1 - P_0 = \frac{1}{2}\vec{v} \\ P_2 - P_0 = \vec{v} \end{cases}$$

dove $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Ora basta calcolare $p(t)$, usando (2.2.9):

$$\begin{aligned} p(t) &= p_0^2(t) = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_0} p_0^1(t) + \frac{t - t_0}{t_2 - t_0} p_1^1(t) \\ &= \frac{t_2 - t}{t_2 - t_0} \left[\frac{t_1 - t}{t_1 - t_0} P_0 + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} P_1 \right] + \\ &\quad + \frac{t - t_0}{t_2 - t_0} \left[\frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} P_1 + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} P_2 \right] \\ &= \frac{t_2 - t}{t_2 - t_0} \left[\frac{t_1 - t}{t_1 - t_0} P_0 + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \left(P_0 + \frac{1}{2}\vec{v} \right) \right] + \\ &\quad + \frac{t - t_0}{t_2 - t_0} \left[\frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} \left(P_0 + \frac{1}{2}\vec{v} \right) + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} (P_0 + \vec{v}) \right] \\ &= \frac{t_2 - t}{t_2 - t_0} \left[P_0 + \frac{t - t_0}{2(t_1 - t_0)} \vec{v} \right] + \\ &\quad + \frac{t - t_0}{t_2 - t_0} \left[P_0 + \frac{t_2 + t - 2t_1}{2(t_2 - t_1)} \vec{v} \right] \\ &= P_0 + \frac{t - t_0}{2(t_2 - t_0)} \left[\frac{t_2 - t}{t_1 - t_0} + \frac{t_2 + t - 2t_1}{t_2 - t_1} \right] \vec{v}. \end{aligned}$$

- In generale il supporto della funzione interpolante (2.2.1) non è contenuto nell'involucro convesso dato dai punti interpolati (caratteristica, che vedremo in seguito, hanno invece le curve di Bézier rispetto al loro poligono di controllo).
- La funzione data da (2.2.1) non ha la proprietà di variation diminishing.

2.2.2 Interpolazione di Lagrange

Un altro metodo per determinare la funzione interpolante (2.2.1) sfrutta i *polinomi di Lagrange*

Definizione 2.2.1. Dati $n + 1$ valori $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ distinti (con $t_j < t_{j+1}$ $\forall i = 0, \dots, n$), definiamo l' i -esimo *polinomio di Lagrange* relativo ai valori

dati, nel seguente modo:

$$(2.2.13) \quad L_i^n(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j}$$

per $i = 0, \dots, n$.

Definiamo quindi la funzione interpolante (di Lagrange) come:

$$(2.2.14) \quad p_L(t) = \sum_{i=0}^n L_i^n(t) P_i.$$

Osservazione 2.2.4.

$$(2.2.15) \quad L_i^n(t_j) = \delta_{i,j}$$

dove $\delta_{i,j}$ è la *delta di Kronecker*. Quindi l' i -esimo polinomio di Lagrange si annulla per tutti i nodi, tranne per il nodo t_i in cui vale 1. Quindi la (2.2.14) interpola effettivamente i punti dati, infatti:

$$(2.2.16) \quad p_L(t_j) = \sum_{i=0}^n L_i^n(t_j) P_i = \sum_{i=0}^n \delta_{i,j} P_i = P_j \quad \forall j = 0, \dots, n.$$

Osservazione 2.2.5. Per il teorema 2.2.1 sappiamo che una funzione polinomiale di grado minore o uguale a n che interpola $n + 1$ punti è unica. Ma abbiamo dimostrato che sia la funzione $p(t)$ definita da (2.2.9) che la funzione $p_L(t)$ definita da (2.2.14) interpolano i punti dati. Quindi in realtà queste due funzioni sono la stessa funzione: $p(t) = p_L(t)$. Quindi tutte le osservazioni fatte per la funzione ottenuta mediante l'algoritmo di Aitken valgono anche per la funzione di Lagrange e viceversa.

Osservazione 2.2.6. L'interpolazione di Lagrange ha però un grosso difetto: se abbiamo molti punti iniziali, e quindi i polinomi usati sono di grado molto alto, la funzione interpolante può presentare delle oscillazioni. Questo fenomeno prende il nome di *fenomeno di Runge*. Infatti per come sono stati definiti i polinomi di Lagrange, se i nodi sono troppo ravvicinati, il denominatore tende a zero. Un esempio di ciò lo possiamo vedere nella Figura 2.4, dove abbiamo interpolato la funzione $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$ definita sull'intervallo $[-5, 5]$ (colore blu) con 10 e 15 nodi equidistanziati sull'asse delle t (rispettivamente colore rosso e verde).

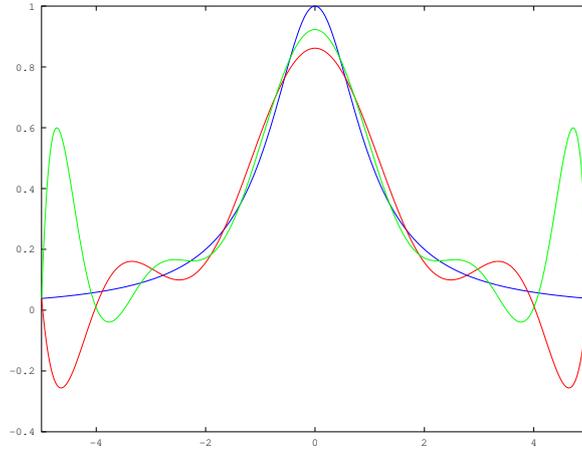


Figura 2.4: Fenomeno di Runge

2.2.3 Calcolo dell'errore

Vogliamo ora infine valutare l'errore che si commette quando si usa una funzione interpolante polinomiale per approssimare un'altra funzione. Sia $g(t)$ una funzione di cui conosciamo $n + 1$ punti del grafico $(t_i, g(t_i)) = P_i$, e che approssimiamo con la funzione $p(t)$. Allora vale il seguente teorema.

Teorema 2.2.2. *Siano $t_i \in \mathbb{R}$ i nodi del problema d'interpolazione considerato, $p(t)$ la funzione polinomiale interpolante, e sia $t^* \in \mathbb{R}$. Sia inoltre I_{t^*} il più piccolo intervallo che contiene i nodi ed il valore t^* tale che $g \in \mathcal{C}^{n+1}(I_{t^*})$. Allora $\forall t^* \notin \{t_0, \dots, t_n\} \exists \xi \in I_{t^*}$ tale che:*

$$(2.2.17) \quad g(t^*) - p(t^*) = \frac{\omega(t^*)}{(n+1)!} g^{(n+1)}(\xi)$$

$$\text{dove } \omega(t) = \prod_{i=0}^n (t - t_i).$$

Dimostrazione. Poniamo $E = g(t) - p(t)$, e sia

$$(2.2.18) \quad G(t) = E(t) - \frac{\omega(t)}{\omega(t^*)} E(t^*).$$

Possiamo quindi osservare che:

- $\forall i = 0, \dots, n$ si ha

$$(2.2.19) \quad G(t_i) = E(t_i) - \frac{\omega(t_i)}{\omega(t^*)} E(t^*)$$

ma $\omega(t_i) = 0$, quindi

$$(2.2.20) \quad G(t_i) = E(t_i) = g(t_i) - p(t_i) = 0$$

essendo $p(t)$ la funzione interpolante.

- inoltre vale:

$$(2.2.21) \quad G(t^*) = E(t^*) - \frac{\omega(t^*)}{\omega(t^*)} E(t^*) = 0.$$

Quindi la funzione polinomiale $G(t)$ che abbiamo costruito è tale che si annulla in $n + 2$ valori distinti, e $G(t) \in \mathcal{C}^{n+1}(I_{t^*})$. Quindi per il teorema di Rolle esistono $n + 1$ valori distinti in cui $G'(t)$ si annulla. Quindi, iterando il discorso, sempre per il teorema di Rolle, vale la seguente catena di proposizioni:

$$\begin{array}{ll} G'(t) \in \mathcal{C}^n(I_{t^*}) & \text{si annulla in } n + 1 \text{ valori distinti;} \\ G''(t) \in \mathcal{C}^{n-1}(I_{t^*}) & \text{si annulla in } n \text{ valori distinti;} \\ G'''(t) \in \mathcal{C}^{n-2}(I_{t^*}) & \text{si annulla in } n - 1 \text{ valori distinti;} \\ \dots & \dots \\ G^{n+1}(t) \in \mathcal{C}^0(I_{t^*}) & \text{si annulla in } 1 \text{ valore.} \end{array}$$

Calcoliamo quindi la derivata $(n+1)$ -esima di $G(t)$ rispetto all'indeterminata t :

$$\begin{aligned} G^{n+1}(t) &= E^{n+1}(t) - \frac{E(t^*)}{\omega(t^*)} \omega^{n+1}(t) \\ &= g^{n+1}(t) - p^{n+1}(t) - \frac{E(t^*)}{\omega(t^*)} \omega^{n+1}(t). \end{aligned}$$

Ma $\omega^{n+1}(t) = (n + 1)!$ invece $p^{n+1}(t) = 0$ perchè $p(t)$ è una funzione polinomiale di grado n . Quindi:

$$(2.2.22) \quad G^{n+1}(t) = g^{n+1}(t) - \frac{E(t^*)}{\omega(t^*)} (n + 1)!.$$

A questo punto, come abbiamo già detto, $\exists \xi \in I_{t^*}$ tale che $G^{n+1}(\xi) = 0$. Quindi:

$$(2.2.23) \quad 0 = g^{n+1}(\xi) - \frac{E(t^*)}{\omega(t^*)} (n + 1)! \Rightarrow E(t^*) = g(t^*) - p(t^*) = \frac{g^{n+1}(\xi)}{(n + 1)!} \omega(t^*).$$

□

Osservazione 2.2.7. Dimostriamo ora la proposizione 2.1.2. Infatti l'interpolazione lineare è semplicemente un'interpolazione polinomiale per cui $n = 1$. Quindi per il teorema 2.2.2 appena dimostrato, se $t \in [t_i, t_{i+1}] \quad \exists \xi \in [t_i, t_{i+1}]$ (che dipende da t) tale che:

$$(2.2.24) \quad g(t) - f(t) = (t - t_i)(t - t_{i+1}) \frac{g''(\xi)}{2}.$$

Osserviamo che:

$$\min_{t \in [t_i, t_{i+1}]} (t - t_i)(t - t_{i+1}) = -\frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{4}.$$

Infatti:

$$\frac{d}{dt}(t - t_i)(t - t_{i+1}) = 2t - t_i - t_{i+1} = 0 \Rightarrow t = \frac{t_i + t_{i+1}}{2}$$

quindi

$$\begin{aligned} \min_{t \in [t_i, t_{i+1}]} (t - t_i)(t - t_{i+1}) &= -\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2} - t_i\right) \left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2} - t_{i+1}\right) \\ &= -\frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{4}. \end{aligned}$$

Quindi vale la (2.1.4), infatti vale:

$$\begin{aligned} |f(t) - g(t)| &\leq \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} |(t - t_i)(t - t_{i+1})| \frac{|g''(t)|}{2} \\ &\leq \frac{1}{8}(t_{i+1} - t_i)^2 \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} |g''(t)|. \end{aligned}$$

Capitolo 3

Le curve di Bézier

Le *curve di Bézier* sono delle importanti curve differenziali, che prendono il nome dall'ingegnere francese Pierre Bézier, il primo ad usarle sistematicamente. L'idea è quella di definire una curva che segua il comportamento di una poligonale data, detto *poligono di controllo*. Noi presenteremo due metodi per ottenere queste curve: uno ricorsivo (l'*algoritmo di de Casteljau*), e uno diretto (che sfrutta i *polinomi di Bernstein*).

Incominciamo ricordando che chiamiamo *curva (differenziale) regolare*, un'applicazione

$$p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

continua e derivabile, con derivata continua e tale che $\frac{dP}{dt} \neq 0 \forall t \in [0, 1]$.

3.1 Algoritmo di de Casteljau

Il primo metodo per definire una curva di Bézier, è l'algoritmo ricorsivo di de Casteljau.

Dati n punti $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{E}^3$ e $t \in [0, 1]$, allora l'algoritmo è così definito:

$$(3.1.1) \quad p_i^0(t) = P_i$$

$$(3.1.2) \quad p_i^r(t) = (1-t)p_i^{r-1}(t) + tp_{i+1}^{r-1}(t)$$

con $r = 1, \dots, n$ e $i = 0, \dots, n-r$. Allora la curva di Bézier è $p(t) = p_0^n(t)$. Possiamo subito osservare che il grado della curva è strettamente legato al numero di punti del poligono di controllo: infatti se abbiamo $n+1$ punti, avremo una curva di grado n .

Incominciamo ad analizzare alcuni casi particolari. Prima di tutto se $n = 1$, la curva di Bézier è un semplice segmento, infatti

$$p(t) = p_0^1(t) = (1-t)P_0 + tP_1.$$

Un esempio è la Figura 3.1 dove $P_0 = (1, 1)$ e $P_1 = (3, 2)$.

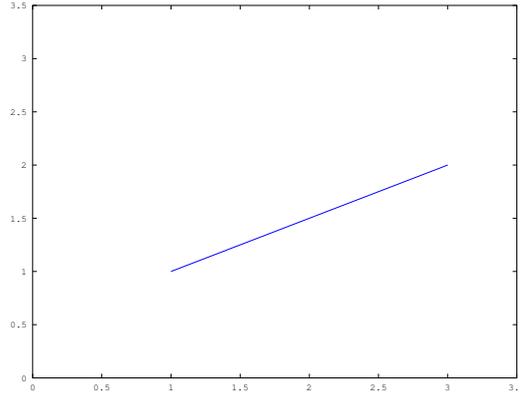


Figura 3.1: Grado $n = 1$

Invece per $n = 2$ otteniamo un arco di parabola:

$$\begin{aligned} p(t) &= p_0^2(t) \\ &= (1-t)p_0^1(t) + tp_1^1(t) \\ &= (1-t)[(1-t)P_0 + tP_1] + t[(1-t)P_1 + tP_2] \\ &= (1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2. \end{aligned}$$

Osservazione 3.1.1. Possiamo osservare che le curve di Bézier di grado 2 conservano i rapporti semplici delle terne seguenti: fissato $\hat{t} \in [0, 1]$ vale

$$(3.1.3) \quad r(P_0, p_0^1(\hat{t}), P_1) = r(P_1, p_1^1(\hat{t}), P_2) = r(p_0^1(\hat{t}), p_0^2(\hat{t}), p_1^1(\hat{t})) = \frac{\hat{t}}{1-\hat{t}}.$$

Infatti:

$$\begin{aligned} r(P_0, p_0^1(\hat{t}), P_1) &= \frac{p_0^1(\hat{t}) - P_0}{P_1 - p_0^1(\hat{t})} \\ &= \frac{(1-\hat{t})P_0 + \hat{t}P_1 - P_0}{P_1 - (1-\hat{t})P_0 - \hat{t}P_1} \\ &= \frac{\hat{t}(P_1 - P_0)}{(1-\hat{t})(P_1 - P_0)} \\ &= \frac{\hat{t}}{1-\hat{t}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r(P_1, p_1^1(\hat{t}), P_2) &= \frac{p_1^1(\hat{t}) - P_1}{P_2 - p_1^1(\hat{t})} \\
&= \frac{(1 - \hat{t})P_1 + \hat{t}P_2 - P_1}{P_2 - (1 - \hat{t})P_1 - \hat{t}P_2} \\
&= \frac{\hat{t}(P_2 - P_1)}{(1 - \hat{t})(P_2 - P_1)} \\
&= \frac{\hat{t}}{1 - \hat{t}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r(p_0^1(\hat{t}), p_0^2(\hat{t}), p_1^1(\hat{t})) &= \frac{p_0^2(\hat{t}) - p_0^1(\hat{t})}{p_1^1(\hat{t}) - p_0^2(\hat{t})} \\
&= \frac{(1 - \hat{t})^2 P_0 + 2\hat{t}(1 - \hat{t})P_1 + (\hat{t})^2 P_2 - (1 - \hat{t})P_0 - \hat{t}P_1}{(1 - \hat{t})P_1 + \hat{t}P_2 - (1 - \hat{t})^2 P_0 - 2\hat{t}(1 - \hat{t})P_1 - (\hat{t})^2 P_2} \\
&= \frac{\hat{t}[(\hat{t} - 1)P_0 + (1 - 2\hat{t})P_1 + \hat{t}P_2]}{(1 - \hat{t})[(\hat{t} - 1)P_0 + (1 - 2\hat{t})P_1 + \hat{t}P_2]} \\
&= \frac{\hat{t}}{1 - \hat{t}}.
\end{aligned}$$

Si può dimostrare che una proprietà analoga a (3.1.3) è valida per tutte le curve di Bézier, anche di grado maggiore.

In Figura 3.2 possiamo vedere un esempio di curva di Bézier di grado 2 dove $P_0 = (-1, 1)$, $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (1, 1)$.

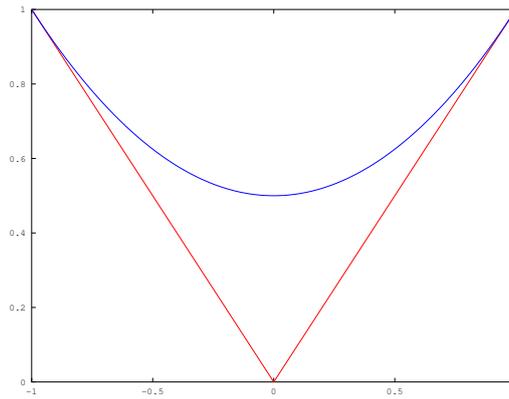


Figura 3.2: Grado $n = 2$

Se $n = 3$ abbiamo un arco di cubica gobba:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= p_0^3(t) \\
 &= (1-t)p_0^2(t) + tp_1^2(t) \\
 &= (1-t)[(1-t)p_0^1(t) + tp_1^1(t)] + t[(1-t)p_1^1(t) + tp_2^1(t)] \\
 &= (1-t)^2p_0^1(t) + 2t(1-t)p_1^1(t) + t^2p_2^1(t) \\
 &= (1-t)^2[(1-t)P_0 + tP_1] + 2t(1-t)[(1-t)P_1 + tP_2] + \\
 &\quad + t^2[(1-t)P_2 + tP_3] \\
 &= (1-t)^3P_0 + 3t(1-t)^2P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3P_3.
 \end{aligned}$$

Osservazione 3.1.2. Possiamo osservare che l'ordine in cui consideriamo i punti del poligono di controllo è molto importante, infatti due curve di Bézier con gli stessi punti del poligono di controllo, ma considerati in ordine diverso, sono diverse.

In Figura 3.3 possiamo vedere un esempio di curva di Bézier di grado 3 dove abbiamo scelto come punti del poligono di controllo $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (2, 1)$ e $P_3 = (3, 0)$, e in Figura 3.4 abbiamo sempre una curva di Bézier di grado 3 con gli stessi punti del poligono di controllo ma in ordine diverso, infatti abbiamo scambiato P_1 con P_2 .

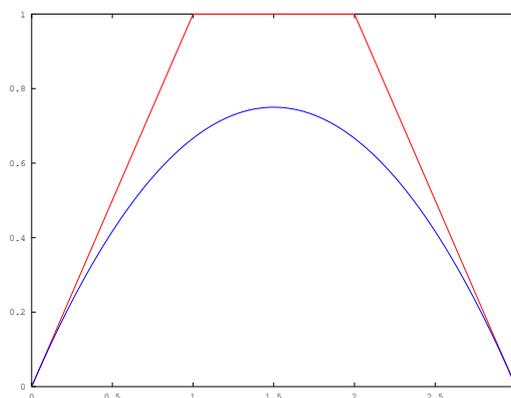


Figura 3.3: Grado $n = 3$, prima disposizione

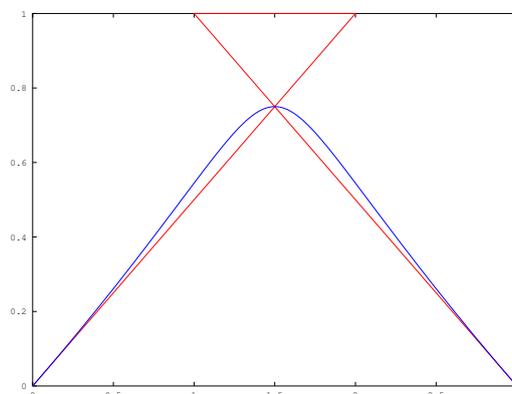


Figura 3.4: Grado $n = 3$, seconda disposizione

Osservazione 3.1.3. Dalla definizione delle curve di Bézier mediante l'algoritmo di de Casteljau, possiamo dedurre una prima proprietà di queste curve: il supporto della curva è completamente contenuta nell'involucro convesso dato dal poligono di controllo, ma non solo, ogni passaggio intermedio dell'algoritmo di de Casteljau p_i^r è contenuto nell'involucro convesso dato dai precedenti p_i^{r-1} ; quindi se i punti del poligono di controllo sono contenuti tutti in un piano, anche la curva di Bézier sarà piana.

3.2 I polinomi di Bernstein

Vediamo ora una maniera diretta per definire una curva di Bézier.

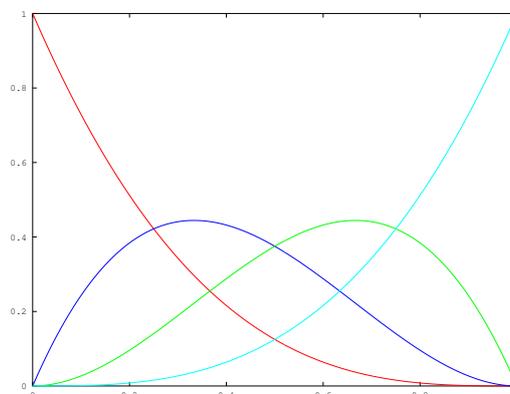
Definizione 3.2.1. Per ogni $n \geq 1$ e per ogni $i = 0, \dots, n$ definiamo i -esimo polinomio di Bernstein di grado n nel modo seguente:

$$(3.2.1) \quad B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}.$$

Completiamo la definizione ponendo:

$$(3.2.2) \quad \begin{aligned} B_0^0(t) &\equiv 1 \\ B_j^n(t) &\equiv 0 \quad \text{per } j \notin \{0, \dots, n\}. \end{aligned}$$

In Figura 3.5 possiamo vedere il grafico dei polinomi di Bernstein di grado 3 per $t \in [0, 1]$. In particolare in rosso $B_0^3(t)$, in blu $B_1^3(t)$, in verde $B_2^3(t)$ e in celeste $B_3^3(t)$.

Figura 3.5: Polinomi di Bernstein grado $n = 3$

Osservazione 3.2.1. I polinomi di Bernstein hanno le seguenti proprietà:

- ogni polinomio di Bernstein di grado n può essere espresso ricorsivamente mediante la seguente relazione:

$$(3.2.3) \quad B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t),$$

infatti

$$\begin{aligned} B_i^n(t) &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i} + \binom{n-1}{i-1} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t); \end{aligned}$$

- vale la seguente uguaglianza:

$$(3.2.4) \quad \sum_{j=0}^n B_j^n(t) \equiv 1$$

infatti

$$\begin{aligned} 1 &= (t + (1-t))^n \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^n B_j^n(t); \end{aligned}$$

- sono funzioni non negative nell'intervallo $[0, 1]$.

Ora è facile vedere come ogni passo dell'algoritmo di de Casteljau può essere espresso mediante polinomi di Bernstein, infatti vale:

$$(3.2.5) \quad p_i^r(t) = \sum_{j=0}^r P_{i+j} B_j^r(t)$$

per $r = 0, \dots, n$ e $i = 0, \dots, n - r$. Ciò si dimostra per induzione su r : per $r = 0$

$$p_i^0(t) = P_i B_0^0(t) = P_i$$

per la prima proprietà di (3.2.2); se supponiamo valida la tesi per $r - 1$, abbiamo:

$$\begin{aligned} p_i^r(t) &= (1-t)p_i^{r-1}(t) + tp_{i+1}^{r-1}(t) \\ &= (1-t) \sum_{j=0}^{r-1} P_{i+j} B_j^{r-1}(t) + t \sum_{j=0}^{r-1} P_{i+1+j} B_j^{r-1}(t) \end{aligned}$$

ora applicando i cambi di indici $k = j + i$ nella prima sommatoria, e $h = j + i + 1$ nella seconda sommatoria, otteniamo:

$$p_i^r(t) = (1-t) \sum_{k=i}^{i+r-1} P_k B_{k-i}^{r-1}(t) + t \sum_{h=i+1}^{i+r} P_h B_{h-i-1}^{r-1}(t)$$

poi per la seconda di (3.2.2) vale:

$$\begin{aligned} p_i^r(t) &= (1-t) \sum_{k=i}^{i+r} P_k B_{k-i}^{r-1}(t) + t \sum_{h=i}^{i+r} P_h B_{h-i-1}^{r-1}(t) \\ &= \sum_{l=i}^{i+r} P_l [(1-t) B_{l-i}^{r-1}(t) + t B_{l-i-1}^{r-1}(t)] \end{aligned}$$

quindi per la (3.2.3) otteniamo:

$$p_i^r(t) = \sum_{l=i}^{i+r} P_l B_{l-i}^r(t)$$

ponendo infine $m = l - i$, otteniamo la tesi:

$$p_i^r(t) = \sum_{m=0}^r P_{m+i} B_m^r(t).$$

Quindi ogni curva di Bézier può essere espressa mediante i polinomi di Bernstein, ponendo $i = 0$ e $r = n$ nella (3.2.5):

$$(3.2.6) \quad p(t) = p_0^n(t) = \sum_{j=0}^n P_j B_j^n(t).$$

Osservazione 3.2.2. Dalla definizione delle curve di Bézier mediante i polinomi di Bernstein possiamo ricavare altre proprietà di queste curve:

- le coordinate t dei punti di una curva di Bézier sono invarianti per trasformazioni affini: infatti questo algoritmo si basa su una successione di interpolazioni lineari, quindi individua tutti i punti della curva mediante le coordinate baricentriche dei punti del poligono di controllo, quindi, data una affinità ϕ di \mathbb{E}^3 , $\forall r = 1, \dots, n$ e $\forall i = 0, \dots, n - r$, vale:

$$(3.2.7) \quad \phi(p(t)) = \sum_{j=0}^n \phi(P_j) B_j^n(t)$$

quindi la curva trasformata tramite ϕ è semplicemente la curva di Bézier avente come punti del poligono di controllo i punti trasformati tramite ϕ ;

- invarianza per trasformazioni affini del dominio, infatti se consideriamo l'affinità $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [0, 1]$ così definita:

$$\phi(t) = \frac{t - \alpha}{\beta - \alpha}$$

allora vale:

$$\begin{aligned} p(\phi(t)) &= \sum_{j=0}^n P_j B_j^n(\phi(t)) \\ &= \sum_{j=0}^n P_j \binom{n}{j} \left(\frac{t - \alpha}{\beta - \alpha} \right)^j \left(1 - \frac{t - \alpha}{\beta - \alpha} \right)^{n-j} \end{aligned}$$

è ancora una curva di Bézier avente come punti del poligono di controllo P_i ;

- la curva passa per il primo e per l'ultimo punto del poligono di controllo, infatti basta osservare che

$$(3.2.8) \quad B_i^n(0) = 1 \Leftrightarrow i = 0 \quad \text{altrimenti} \quad B_i^n(0) = 0$$

$$(3.2.9) \quad B_i^n(1) = 1 \Leftrightarrow i = n \quad \text{altrimenti} \quad B_i^n(1) = 0$$

quindi

$$p(0) = \sum_{j=0}^n P_j B_j^n(0) = P_0 B_0^n(0) = P_0$$

$$p(1) = \sum_{j=0}^n P_j B_j^n(1) = P_n B_n^n(1) = P_n;$$

- simmetria: infatti i polinomi di Bernstein sono simmetrici rispetto a t e ad $1 - t$, ovvero

$$(3.2.10) \quad B_j^n(t) = B_{n-j}^n(1-t)$$

quindi vale

$$(3.2.11) \quad p_0^n(t) = \sum_{j=0}^n P_j B_j^n(t) = \sum_{j=0}^n P_j B_{n-j}^n(1-t) = \sum_{k=0}^n P_{n-k} B_k^n(1-t)$$

quindi la curva di Bézier avente come punti del poligono di controllo P_0, \dots, P_n ha lo stesso supporto di quella che ha come punti del poligono di controllo P_n, \dots, P_0 , non solo, ma il supporto viene percorso nei due casi in verso opposto;

- precisione lineare: infatti vale

$$(3.2.12) \quad \sum_{j=0}^n \frac{j}{n} B_j^n(t) = t$$

come dimostriamo per induzione: infatti se $n = 1$

$$\sum_{j=0}^1 j B_j^1(t) = B_1^1(t) = t;$$

se supponiamo vera la tesi per $n - 1$:

$$\sum_{j=0}^n \frac{j}{n} B_j^n(t) = \sum_{j=0}^n \frac{j}{n} [(1-t) B_j^{n-1}(t) + t B_{j-1}^{n-1}(t)]$$

poi per la proprietà (3.2.2):

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^n \frac{j}{n} B_j^n(t) &= \frac{n-1}{n} (1-t) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j}{n-1} B_j^{n-1}(t) \\
&\quad + \frac{n-1}{n} t \sum_{j=1}^n \frac{j}{n-1} B_{j-1}^{n-1}(t) \\
&= \frac{n-1}{n} (1-t)t + \frac{n-1}{n} t \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n-1} B_k^{n-1}(t) \\
&= \frac{n-1}{n} (1-t)t + \\
&\quad + \frac{n-1}{n} t \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n-1} B_k^{n-1}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-1} B_k^{n-1}(t) \right] \\
&= \frac{n-1}{n} (1-t)t + \frac{n-1}{n} t^2 + \frac{n-1}{n} t \left[\frac{1}{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \right]
\end{aligned}$$

ora per la (3.2.4):

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^n \frac{j}{n} B_j^n(t) &= \frac{n-1}{n} (1-t)t + \frac{n-1}{n} t^2 + \frac{1}{n} t \\
&= t \frac{(n-1)(1-t) + (n-1)t + 1}{n} \\
&= t.
\end{aligned}$$

Quindi se i vertici P_j del poligono di controllo sono equidistanti su un segmento, cioè vale:

$$(3.2.13) \quad P_j = \left(1 - \frac{j}{n}\right) P_0 + \frac{j}{n} P_n \quad \text{per } j = 0, \dots, n$$

allora la curva di Bézier è il segmento stesso, infatti

$$\begin{aligned}
p(t) &= \sum_{j=0}^n P_j B_j^n(t) \\
&= \sum_{j=0}^n \left[\left(1 - \frac{j}{n}\right) P_0 + \frac{j}{n} P_n \right] B_j^n(t) \\
&= P_0 \left[\sum_{j=0}^n B_j^n(t) - \sum_{j=0}^n \frac{j}{n} B_j^n(t) \right] + P_n \sum_{j=0}^n \frac{j}{n} B_j^n(t) \\
&= (1-t) P_0 + t P_n.
\end{aligned}$$

Osserviamo infine che le curve di Bézier non ammettono un controllo locale: se si cambia anche solo uno dei vertici del poligono di controllo tutta la

curva cambia completamente. Definiamo dei nuovi punti del nuovo poligono di controllo nel seguente modo: $P_j^* = P_j + \Delta\vec{v}$ e $P_i^* = P_i$ se $i \neq j$; allora la nuova curva di Bézier sarà:

$$p^*(t) = \sum_{i=0}^n P_i^* B_i^n(t) = (P_j + \Delta\vec{v}) B_j^n(t) + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n P_i B_i^n(t) = p(t) + \Delta\vec{v} B_j^n(t).$$

3.3 Derivate delle curve di Bézier

Incominciamo calcolando la derivata prima rispetto a t dell' i -esimo polinomio di Bernstein di grado n :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B_i^n(t) &= \frac{d}{dt} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= i \frac{n!}{i!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - (n-i) \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i-1} \\ &= \frac{n(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \frac{n(n-1)!}{i!(n-i-1)!} t^i (1-t)^{n-i-1} \\ &= n[B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)]. \end{aligned}$$

Quindi vale:

$$(3.3.1) \quad \frac{d}{dt} B_i^n(t) = n[B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)].$$

Allora la derivata prima di una curva di Bézier è:

$$(3.3.2) \quad \frac{d}{dt} p(t) = n \sum_{j=0}^n [B_{j-1}^{n-1}(t) - B_j^{n-1}(t)] P_j.$$

Ora per la proprietà (3.2.2)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p(t) &= n \sum_{j=1}^n B_{j-1}^{n-1}(t) P_j - n \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) P_j \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} B_k^{n-1}(t) P_{k+1} - n \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) P_j \\ &= n \sum_{j=0}^{n-1} (P_{j+1} - P_j) B_j^{n-1}(t). \end{aligned}$$

Diamo ora la seguente definizione:

Definizione 3.3.1. Per ogni $j = 0, \dots, n-1$ definimo il seguente operatore:

$$(3.3.3) \quad \Delta P_j = P_{j+1} - P_j.$$

A fronte di questa definizione possiamo riscrivere la derivata di una curva di Bézier come:

$$(3.3.4) \quad \frac{d}{dt}p(t) = n \sum_{j=0}^{n-1} \Delta P_j B_j^{n-1}(t).$$

Osservazione 3.3.1. La (3.3.4) è una curva di Bézier avente come punti del poligono di controllo ΔP_i . Ma dobbiamo osservare che la curva derivata non vive in \mathbb{E}^3 come la curva iniziale, perchè per come sono stati definiti i ΔP_i questi non sono punti di \mathbb{E}^3 ma vettori di \mathbb{R}^3 .

Osservazione 3.3.2. Possiamo osservare che per le (3.2.8) e (3.2.9) vale:

$$(3.3.5) \quad \frac{d}{dt}p(0) = n \sum_{j=0}^{n-1} \Delta P_j B_j^{n-1}(0) = n \Delta P_0 = n(P_1 - P_0)$$

$$(3.3.6) \quad \frac{d}{dt}p(1) = n \sum_{j=0}^{n-1} \Delta P_j B_j^{n-1}(1) = n \Delta P_{n-1} = n(P_n - P_{n-1})$$

quindi il vettore tangente nel punto iniziale e nel punto finale è rispettivamente proporzionale al segmento congiungente il primo e secondo, penultimo e ultimo punto del poligono di controllo.

Cerchiamo ora le derivate di ordine maggiore. Incominciamo dando una estensione della definizione dell'operatore Δ :

Definizione 3.3.2. Per ogni $r \geq 1$ e per ogni $j = 0, \dots, n-1$ definiamo ricorsivamente il seguente operatore:

$$(3.3.7) \quad \Delta^r P_j = \Delta^{r-1} P_{j+1} - \Delta^{r-1} P_j$$

dove per ogni $j = 0, \dots, n$ $\Delta^0 P_j = P_j$.

Osserviamo subito che per $r = 1$ Δ^r è l'operatore definito dalla (3.3.3), invece, per esempio, per $r = 2, 3$ otteniamo:

$$\begin{aligned} \Delta^2 P_j &= \Delta^1 P_{j+1} - \Delta^1 P_j \\ &= \Delta^0 P_{j+2} - \Delta^0 P_{j+1} - (\Delta^0 P_{j+1} - \Delta^0 P_j) \\ &= P_{j+2} - 2P_{j+1} + P_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^3 P_j &= \Delta^2 P_{j+1} - \Delta^2 P_j \\
&= \Delta^1 P_{j+2} - \Delta^1 P_{j+1} - (\Delta^1 P_{j+1} - \Delta^1 P_j) \\
&= \Delta^0 P_{j+3} - \Delta^0 P_{j+2} - 2(\Delta^0 P_{j+2} - \Delta^0 P_{j+1}) + \Delta^0 P_{j+1} - \Delta^0 P_j \\
&= P_{j+3} - 3P_{j+2} + 3P_{j+1} - P_j.
\end{aligned}$$

Osservazione 3.3.3. Questi operatori possono essere definiti anche direttamente, e non in maniera ricorsiva, nel seguente modo:

$$(3.3.8) \quad \Delta^r P_i = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{r-j} P_{i+j}.$$

Infatti si può dimostrare la (3.3.8) per ricorsione su r . Per $r = 0$ vale:

$$\Delta^0 P_i = \binom{0}{0} (-1)^0 P_i = P_i;$$

ora se supponiamo la tesi vera per $r - 1$ vale:

$$\begin{aligned}
\Delta^r P_i &= \Delta^{r-1} P_{i+1} - \Delta^{r-1} P_i \\
&= \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^{r-1-j} P_{i+1+j} - \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^{r-1-j} P_{i+j} \\
&= \sum_{h=1}^r \binom{r-1}{h-1} (-1)^{r-h} P_{i+h} + \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^{r-j} P_{i+j} \\
&= \sum_{h=1}^{r-1} \binom{r-1}{h-1} (-1)^{r-h} P_{i+h} + P_{i+r} + (-1)^r P_i + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^{r-j} P_{i+j} \\
&= P_{i+r} + (-1)^r P_i + \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^{r-j} P_{i+j} \left[\binom{r-1}{j-1} + \binom{r-1}{j} \right] \\
&= P_{i+r} + (-1)^r P_i + \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^{r-j} P_{i+j} \left(\frac{(r-1)!}{(j-1)!(r-j)!} + \right. \\
&\quad \left. \frac{(r-1)!}{j!(r-1-j)!} \right) \\
&= P_{i+r} + (-1)^r P_i + \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^{r-j} P_{i+j} \frac{(r-1)!}{j!(r-j)!} r \\
&= P_{i+r} + (-1)^r P_i + \sum_{j=1}^{r-1} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} P_{i+j}
\end{aligned}$$

ottenendo quindi:

$$\Delta^r P_i = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{r-j} P_{i+j}.$$

Con una dimostrazione analoga alla precedente possiamo così descrivere la derivata r -esima rispetto a t di una curva di Bézier:

$$(3.3.9) \quad \frac{d^r}{dt^r} p(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \Delta^r P_j B_j^{n-r}(t).$$

Consideriamo quindi le derivate valutate in 0 e 1, ottenendo, per le (3.2.8) e (3.2.9):

$$(3.3.10) \quad \frac{d^r}{dt^r} p(0) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \Delta^r P_j B_j^{n-r}(0) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r P_0$$

$$(3.3.11) \quad \frac{d^r}{dt^r} p(1) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \Delta^r P_j B_j^{n-r}(1) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r P_{n-r}.$$

Osserviamo quindi che le derivate r -esime nel punto iniziale e finale dipendono solo dagli $r+1$ punti del poligono di controllo più vicini (nell'ordine). Inoltre possiamo osservare che le curve di Bézier sono univocamente determinate dalle loro derivate per $t=0$ (o per $t=1$), perchè da queste possiamo ricavare i punti del poligono di controllo. Per capire meglio questo concetto possiamo vedere come esempio il caso $n=2$. Supponiamo di conoscere le derivate valutate in 0 e P_0 . Allora dalla derivata prima in 0 e da P_0 possiamo ricavare P_1 :

$$\frac{d}{dt} p(0) = \frac{2!}{1!} \Delta P_0 = 2(P_1 - P_0) \Rightarrow P_1 = P_0 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} p(0)$$

ed infine da P_0 e P_1 e dalla derivata seconda ricavo P_2 :

$$\frac{d^2}{dt^2} p(0) = \frac{2!}{0!} \Delta^2 P_0 = P_2 - 2P_1 + P_0 \Rightarrow P_2 = \frac{d^2}{dt^2} p(0) + 2P_1 - P_0.$$

Osservazione 3.3.4. Le derivate delle curve di Bézier possono essere espresse anche in funzione dei punti intermedi generati dall'algoritmo di De Casteljau, nel seguente modo:

$$(3.3.12) \quad \frac{d^r}{dt^r} p(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r p_0^{n-r}(t).$$

Dimostriamo la veridicità di quanto abbiamo appena asserito per induzione su r . Allora per $r = 0$ abbiamo:

$$\frac{d^0}{dt^0}p(t) = \frac{n!}{n!}\Delta^0 p_0^n(t) = p(t).$$

Se supponiamo ora vera la tesi per $r - 1$:

$$\begin{aligned} \frac{d^r}{dt^r}p(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}}p(t) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{n!}{(n-r+1)!} \Delta^{r-1} p_0^{n-r+1}(t) \right) \\ &= \frac{n!}{(n-r+1)!} \Delta^{r-1} \frac{d}{dt} \left[\sum_{j=0}^{n-r+1} P_j B_j^{n-r+1}(t) \right] \\ &= \frac{n!}{(n-r+1)!} \Delta^{r-1} \sum_{j=0}^{n-r+1} P_j \frac{d}{dt} B_j^{n-r+1}(t) \end{aligned}$$

ora per la (3.3.1) otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{d^r}{dt^r}p(t) &= \frac{n!}{(n-r+1)!} \Delta^{r-1} \sum_{j=0}^{n-r+1} P_j (n-r+1) (B_{j-1}^{n-r}(t) - B_j^{n-r}(t)) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^{r-1} \sum_{j=0}^{n-r+1} P_j (B_{j-1}^{n-r}(t) - B_j^{n-r}(t)) \end{aligned}$$

infine per la (3.2.2):

$$\begin{aligned} \frac{d^r}{dt^r}p(t) &= \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^{r-1} \left[\sum_{j=1}^{n-r+1} P_j B_{j-1}^{n-r}(t) - \sum_{j=0}^{n-r} P_j B_j^{n-r}(t) \right] \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^{r-1} \left[\sum_{h=0}^{n-r} P_{h+1} B_h^{n-r}(t) - p_0^{n-r}(t) \right] \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^{r-1} (p_1^{n-r}(t) - p_0^{n-r}(t)) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r p_0^{n-r}(t). \end{aligned}$$

Osservazione 3.3.5. Usando l'osservazione precedente per $r = 1$, possiamo vedere che la derivata prima può essere riespressa come:

$$(3.3.13) \quad \frac{d}{dt}p(t) = \frac{n!}{(n-1)!} \Delta p_0^{n-1}(t) = n[p_1^{n-1}(t) - p_0^{n-1}(t)].$$

Quindi i punti intermedi dell'algorithmo di de Castel'jau $p_0^{n-1}(t)$ e $p_1^{n-1}(t)$ determinano il vettore tangente alla curva nel punto $p(t)$.

3.4 Innalzamento di grado

Supponiamo di avere una curva di Bézier di grado n , con punti del poligono di controllo P_0, \dots, P_n e da questa vogliamo ottenere una curva di grado $n+1$, con lo stesso supporto. Cominciamo osservando che i nuovi punti del poligono di controllo Q_j , con $j = 0, \dots, n+1$ devono essere tali che:

$$(3.4.1) \quad Q_j = \frac{j}{n+1} P_{j-1} + \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) P_j.$$

Incominciamo a vedere l'espressione analitica delle due curve mediante i rispettivi punti del poligono di controllo:

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{j=0}^n P_j B_j^n(t) \\ &= \sum_{j=0}^n P_j \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^n P_j \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} (1-t+t) \\ &= \sum_{j=0}^n P_j \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j+1} + \sum_{j=0}^n P_j \binom{n}{j} t^{j+1} (1-t)^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^n P_j \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j+1} + \sum_{k=1}^{n+1} P_{k-1} \binom{n}{k-1} t^k (1-t)^{n+1-k} \\ q(t) &= \sum_{h=0}^{n+1} Q_h B_h^{n+1}(t) = \sum_{h=0}^{n+1} Q_h \binom{n+1}{h} t^h (1-t)^{n+1-h} \end{aligned}$$

Ma noi vogliamo che le due curve abbiano lo stesso supporto, ovvero $p(t) = q(t)$, quindi deve valere:

$$(3.4.2) \quad \begin{aligned} \sum_{j=0}^n P_j \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j+1} + \sum_{k=1}^{n+1} P_{k-1} \binom{n}{k-1} t^k (1-t)^{n+1-k} = \\ = \sum_{h=0}^{n+1} Q_h \binom{n+1}{h} t^h (1-t)^{n+1-h}. \end{aligned}$$

Quindi, per ogni $j = 0, \dots, n+1$, deve essere:

$$(3.4.3) \quad Q_j \binom{n+1}{j} = P_j \binom{n}{j} + P_{j-1} \binom{n}{j-1}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!} Q_j &= \frac{n!}{j!} (n-j)! P_j + \frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!} P_{j-1} \\
\Rightarrow \frac{n+1}{j!(n+1-j)!} Q_j &= \frac{1}{j!(n-j)!} P_j + \frac{1}{(j-1)!(n-j+1)!} P_{j-1} \\
\Rightarrow \frac{n+1}{j!(n-j+1)} Q_j &= \frac{1}{j!} P_j + \frac{1}{(j-1)!(n-j+1)} P_{j-1} \\
\Rightarrow \frac{n+1}{j(n-j+1)} Q_j &= \frac{1}{j} P_j + \frac{1}{n-j+1} P_{j-1} \\
\Rightarrow (n+1) Q_j &= (n-j+1) P_j + j P_{j-1} \\
\Rightarrow Q_j &= \frac{j}{n+1} P_{j-1} + \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) P_j.
\end{aligned}$$

Per esempio se consideriamo una curva di grado $n = 3$, avente come punti di poligono di controllo P_0, \dots, P_3 , i nuovi punti saranno della forma:

$$\begin{aligned}
Q_0 &= P_0 \\
Q_1 &= \frac{1}{4} P_0 + \left(1 - \frac{1}{4}\right) P_1 = P_0 + \frac{3}{4} (P_1 - P_0) \\
Q_2 &= \frac{2}{4} P_1 + \left(1 - \frac{2}{4}\right) P_2 = P_1 + \frac{1}{2} (P_2 - P_1) \\
Q_3 &= \frac{3}{4} P_2 + \left(1 - \frac{3}{4}\right) P_3 = P_2 + \frac{1}{4} (P_3 - P_2) \\
Q_4 &= P_3.
\end{aligned}$$

In Figura 3.6 abbiamo applicato l'innalzamento di grado alla curva in Figura 3.3.

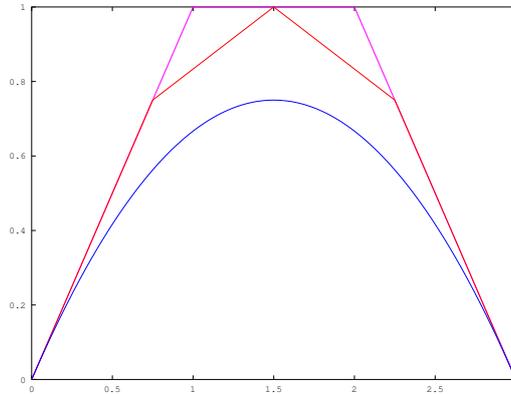


Figura 3.6: Innalzamento di grado

Osservazione 3.4.1. Dalla (3.4.1) possiamo osservare che i nuovi punti Q_j sono ottenuti mediante un'interpolazione lineare dei corrispettivi punti del poligono di controllo della curva di grado n valutata tramite il parametro $\frac{j}{n+1}$. Quindi il nuovo poligono di controllo è contenuto nell'involucro convesso di quello vecchio, per le proprietà dell'interpolazione lineare. Inoltre l'involucro convesso del nuovo poligono è strettamente contenuto in quello del vecchio poligono di controllo. Questo fatto ci permette di restringere la porzione di spazio dove si troverà il supporto della nostra curva di Bézier. Anzi se ripetiamo il processo all'infinito, il poligono di controllo ottenuto innalzando il grado infinite volte tende a coincidere con la curva stessa.

Osservazione 3.4.2. Dalla osservazione precedente possiamo anche vedere che le curve di Bézier hanno la proprietà di variation diminishing. Ovvero data una curva di Bézier $p(t)$ e un generico piano π , allora il numero di intersezioni tra $p(t)$ e il piano π sarà sempre minore o uguale al numero di intersezioni tra il poligono di controllo e il piano π . Infatti abbiamo visto che l'innalzamento di grado è una interpolazione lineare, che abbiamo già visto avere questa proprietà: quindi il poligono di controllo ottenuto innalzando di r volte il grado avrà un numero di intersezioni con il piano π sempre minore o uguale del numero di intersezioni tra lo stesso piano e il poligono di controllo ottenuto innalzando il grado $r - 1$ volte. Ma $p(t)$ è il limite di questi poligoni di controllo, al tendere di r a infinito, e quindi anche lei ha questa proprietà. Un caso particolare si ha quando abbiamo un poligono convesso (un poligono o una curva planari si dicono *convessi* se non hanno più di due intersezioni con ogni altro piano). Quindi per la proprietà di variation diminishing, un poligono di controllo convesso, genera una curva convessa.

3.5 Proprietà di suddivisione

Fino ad ora abbiamo sempre considerato curve di Bézier definite sull'intervallo $[0, 1]$, ma in realtà, abbiamo visto che possiamo anche definirle su un qualsiasi intervallo $[a, b]$. Supponiamo ora di voler restringere il dominio da $[0, 1]$ a $[0, c]$. Quello che vogliamo fare ora è determinare i punti del poligono di controllo di questa nuova curva, che avrà ovviamente lo stesso grado di quella precedente.

Introduciamo quindi il parametro s per l'intervallo $[0, c]$, che definiamo come $s = \frac{t}{c}$. Possiamo osservare subito che:

$$s = 0 \Leftrightarrow t = 0 \quad \text{e} \quad s = 1 \Leftrightarrow t = c.$$

Denotiamo poi con P_i i punti del poligono di controllo della curva $p(t)$ definita su $[0, 1]$, e con C_j i punti del poligono di controllo della curva $c(s)$ definita su $[0, c]$, che ovviamente sarà un tratto della curva $p(t)$. Incominciamo ad osservare che, visto che sono tratti della stessa curva, le derivate nel punto $t = s = 0$ devono coincidere:

$$(3.5.1) \quad \frac{d^r}{dt^r} p(0) = \frac{d^r}{ds^r} c(0)$$

e abbiamo già osservato che queste dipendono solamente dai primi $r + 1$ punti dei relativi poligoni di controllo. Consideriamo quindi i punti P_0, \dots, P_r e C_0, \dots, C_r , e interpretiamoli come i punti di due poligoni di controllo di due curve di grado r , $p_0^r(t)$ e $c_0^r(s)$. Queste curve sono uguali se e solo se i loro vettori derivati valutati in 0 sono uguali fino all'ordine r :

$$(3.5.2) \quad c_0^r(s) = p_0^r(t) \quad \forall s, t \Rightarrow \sum_{j=0}^r C_j B_j^r(s) = \sum_{j=0}^r P_j B_j^r(t) \quad \forall s, t$$

e questa relazione deve valere in particolare per i corrispondenti valori $s = 1$ e $t = c$:

$$(3.5.3) \quad c_0^r(1) = p_0^r(c) \Rightarrow \sum_{j=0}^r C_j B_j^r(1) = \sum_{j=0}^r P_j B_j^r(c) \Rightarrow C_r = p_0^r(c).$$

Ora ripetendo il ragionamento per tutti gli ordini di derivazioni da $r - 1$ a 0, otteniamo esplicitamente tutti i punti C_j :

$$(3.5.4) \quad C_j = p_0^j(c) \quad \forall j = 0, \dots, r.$$

Definizione 3.5.1. La (3.5.4) è detta *formula di suddivisione* per le curve di Bézier.

Ora per la proprietà di simmetria (3.2.11) possiamo definire i punti del poligono di controllo della curva definita in $[c, 1]$ come $D_j = p_j^{n-j}(c)$. Infine supponiamo dati i punti C_j del tratto relativo all'intervallo $[0, c]$ e supponiamo di voler determinare i punti D_j del tratto relativo all'intervallo $[c, 1]$. Allora per quanto detto finora deve valere la relazione:

$$(3.5.5) \quad D_j = c_{n-j}^j(d)$$

dove $d = \frac{1}{c}$.

La dimostrazione della (3.5.5) per ogni n è piuttosto complicata, quindi ci limiteremo a provarla per $n = 2$ e $n = 3$. Iniziamo con $n = 2$ e calcoliamo $D_j = p_j^{n-j}(c)$ per ogni $j = 0, 1, 2$:

$$\begin{aligned} D_0 &= p_0^2(c) \\ &= \sum_{i=0}^2 P_i B_i^2(c) \\ &= (1-c)^2 P_0 + 2c(1-c)P_1 + c^2 P_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= p_1^1(c) \\ &= \sum_{i=0}^1 P_{1+i} B_i^1(c) \\ &= (1-c)P_1 + cP_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= p_2^0(c) \\ &= \sum_{i=0}^0 P_{2+i} B_i^0(c) \\ &= P_2. \end{aligned}$$

Ora applichiamo la (3.5.5) sfruttando ogni volta la (3.5.4):

$$\begin{aligned} D_0 &= c_2^0(d) \\ &= \sum_{i=0}^0 C_{2+i} B_i^0(d) \\ &= C_2 \\ &= p_0^2(c) \\ &= \sum_{h=0}^2 P_h B_h^2(c) \\ &= (1-c)^2 P_0 + 2c(1-c)P_1 + c^2 P_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1 &= c_1^1(d) \\
&= \sum_{i=0}^1 C_{1+i} B_i^1(d) \\
&= (1-d)C_1 + dC_2 \\
&= (1-d)p_0^1(c) + dp_0^2(c) \\
&= (1-d) \left(\sum_{h=0}^1 P_h B_h^1(c) \right) + d \left(\sum_{h=0}^2 P_h B_h^2(c) \right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{c} \right) ((1-c)P_0 + cP_1) + \frac{1}{c} ((1-c)^2 P_0 + 2c(1-c)P_1 + c^2 P_2) \\
&= \left(-\frac{(1-c)^2}{c} + \frac{(1-c)^2}{c} \right) P_0 + (c-1+2(1-c))P_1 + cP_2 \\
&= (1-c)P_1 + cP_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2 &= c_0^2(d) \\
&= \sum_{i=0}^2 C_i B_i^2(d) \\
&= (1-d)^2 C_0 + 2d(1-d)C_1 + d^2 C_2 \\
&= (1-d)^2 p_0^0(c) + 2d(1-d)p_0^1(c) + d^2 p_0^2(c) \\
&= (1-d)^2 \left(\sum_{h=0}^0 P_h B_h^0(c) \right) + 2d(1-d) \left(\sum_{h=0}^1 P_h B_h^1(c) \right) + \\
&\quad + d^2 \left(\sum_{h=0}^2 P_h B_h^2(c) \right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{c} \right)^2 P_0 + \frac{2}{c} \left(1 - \frac{1}{c} \right) ((1-c)P_0 + cP_1) + \\
&\quad + \frac{1}{c^2} ((1-c)^2 P_0 + 2c(1-c)P_1 + c^2 P_2) \\
&= \left(\frac{(1-c)^2}{c^2} - 2\frac{(1-c)^2}{c^2} + \frac{(1-c)^2}{c^2} \right) P_0 + \\
&\quad + \left(-2\frac{(1-c)}{c} + 2\frac{(1-c)}{c} \right) P_1 + P_2 \\
&= P_2.
\end{aligned}$$

Procediamo in maniera analoga per $n = 3$. Per $j = 0, 1, 2, 3$ calcoliamoci $D_j = p_j^{n-j}(c)$:

$$\begin{aligned}
D_0 &= p_0^3(c) \\
&= \sum_{i=0}^3 P_i B_i^3(c) \\
&= (1-c)^3 P_0 + 3c(1-c)^2 P_1 + 3c^2(1-c) P_2 + c^3 P_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1 &= p_1^2(c) \\
&= \sum_{i=0}^2 P_{1+i} B_i^2(c) \\
&= (1-c)^2 P_1 + 2c(1-c) P_2 + c^2 P_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2 &= p_2^1(c) \\
&= \sum_{i=0}^1 P_{2+i} B_i^1(c) \\
&= (1-c) P_2 + c P_3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3 &= p_3^0(c) \\
&= \sum_{i=0}^0 P_{3+i} B_i^0(c) \\
&= P_3.
\end{aligned}$$

Come prima ora invece applichiamo la (3.5.5) sempre sfruttando la (3.5.4) per svolgere i conti:

$$\begin{aligned}
D_0 &= c_3^0(d) \\
&= \sum_{i=0}^0 C_{3+i} B_i^0(d) \\
&= C_3 \\
&= p_0^3(c) \\
&= \sum_{h=0}^3 P_h B_h^2(c) \\
&= (1-c)^3 P_0 + 3c(1-c)^2 P_1 + 3c^2(1-c) P_2 + c^3 P_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1 &= c_2^1(d) \\
&= \sum_{i=0}^1 C_{2+i} B_i^1(d) \\
&= (1-d)C_2 + dC_3 \\
&= (1-d)p_0^2(c) + dp_0^3(c) \\
&= (1-d) \left(\sum_{h=0}^2 P_h B_h^2(c) \right) + d \left(\sum_{h=0}^3 P_h B_h^3(c) \right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{c} \right) ((1-c)^2 P_0 + 2c(1-c)P_1 + c^2 P_2) + \\
&\quad + \frac{1}{c} ((1-c)^3 P_0 + 3c(1-c)^2 P_1 + 3c^2(1-c)P_2 + c^3 P_3) \\
&= \left(-\frac{(1-c)^3}{c} + \frac{(1-c)^3}{c} \right) P_0 + (-2(1-c)^2 + 3(1-c)^2) P_1 + \\
&\quad + (-c(1-c) + 3c(1-c)) P_2 + c^2 P_3 \\
&= (1-c)^2 P_1 + 2c(1-c) P_2 + c^2 P_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2 &= c_1^2(d) \\
&= \sum_{i=0}^2 C_{1+i} B_i^2(d) \\
&= (1-d)^2 C_1 + 2d(1-d) C_2 + d^2 C_3 \\
&= (1-d)^2 p_0^1(c) + 2d(1-d) p_0^2(c) + d^2 p_0^3(c) \\
&= (1-d)^2 \left(\sum_{h=0}^1 P_h B_h^1(c) \right) + 2d(1-d) \left(\sum_{h=0}^2 P_h B_h^2(c) \right) + \\
&\quad + d^2 \left(\sum_{h=0}^3 P_h B_h^3(c) \right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{c} \right)^2 ((1-c)P_0 + cP_1) + \\
&\quad + \frac{2}{c} \left(1 - \frac{1}{c} \right) ((1-c)^2 P_0 + 2c(1-c)P_1 + c^2 P_2) + \\
&\quad + \frac{1}{c^2} ((1-c)^3 P_0 + 3c(1-c)^2 P_1 + 3c^2(1-c)P_2 + c^3 P_3) \\
&= \left(\frac{(1-c)^3}{c^2} - 2\frac{(1-c)^3}{c^2} + \frac{(1-c)^3}{c^2} \right) P_0 + \\
&\quad + \left(\frac{(1-c)^2}{c} - 4\frac{(1-c)^2}{c} + 3\frac{(1-c)^2}{c} \right) P_1 + \\
&\quad + (-2(1-c) + 3(1-c))P_2 + cP_3 \\
&= (1-c)P_2 + cP_3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3 &= c_0^3(d) \\
&= \sum_{i=0}^3 C_i B_i^3(d) \\
&= (1-d)^3 C_0 + 3d(1-d)^2 C_1 + 3d^2(1-d) C_2 + d^3 C_3 \\
&= (1-d)^3 p_0^0(c) + 3d(1-d)^2 p_0^1(c) + 3d^2(1-d) p_0^2(c) + d^3 p_0^3(c) \\
&= (1-d)^3 \left(\sum_{h=0}^0 P_h B_h^0(c) \right) + 3d(1-d)^2 \left(\sum_{h=0}^1 P_h B_h^1(c) \right) + \\
&\quad + 3d^2(1-d) \left(\sum_{h=0}^2 P_h B_h^2(c) \right) + d^3 \left(\sum_{h=0}^3 P_h B_h^3(c) \right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{c}\right)^3 P_0 + \frac{3}{c} \left(1 - \frac{1}{c}\right)^2 ((1-c)P_0 + cP_1) + \\
&\quad + \frac{3}{c^2} \left(1 - \frac{1}{c}\right) ((1-c)^2 P_0 + 2c(1-c)P_1 + c^2 P_2) + \\
&\quad + \frac{1}{c^3} ((1-c)^3 P_0 + 3c(1-c)^2 P_1 + 3c^2(1-c)P_2 + c^3 P_3) \\
&= \left(-\frac{(1-c)^3}{c^3} + 3\frac{(1-c)^3}{c^3} - 3\frac{(1-c)^3}{c^3} + \frac{(1-c)^3}{c^3} \right) P_0 + \\
&\quad + \left(3\frac{(1-c)^2}{c^2} - 6\frac{(1-c)^2}{c^2} + 3\frac{(1-c)^2}{c^2} \right) P_1 + \\
&\quad + \left(-3\frac{(1-c)}{c} + 3\frac{(1-c)}{c} \right) P_2 + P_3 \\
&= P_3.
\end{aligned}$$

In Figura 3.7 abbiamo applicato il processo di suddivisione alla curva della Figura 3.3 con $c = \frac{1}{2}$.

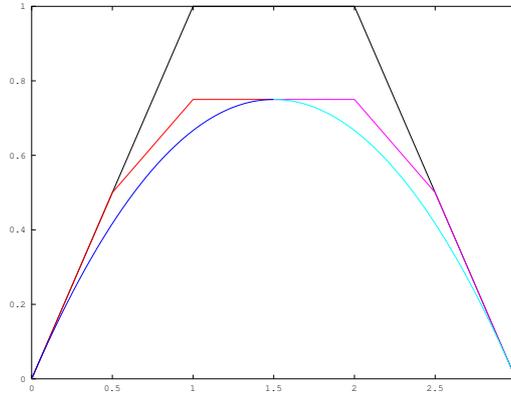


Figura 3.7: Suddivisione

Capitolo 4

Polinomi interpolanti di Hermite

Nel capitolo 2 abbiamo analizzato solo casi di interpolazione di un certo numero di punti dati, ma esistono dei casi, che vogliamo illustrare in questo capitolo, in cui si hanno delle informazioni aggiuntive, come per esempio il valore delle derivate della funzione interpolante in corrispondenza dei punti da interpolare. Il metodo più utilizzato per risolvere questo tipo di problema è *l'interpolazione di Hermite*. In questo capitolo vogliamo analizzare in particolare i casi di funzioni polinomiali di grado 3 e 5.

4.1 Polinomi di Hermite di grado 3

Supponiamo di assegnare due punti B_0 e B_1 e due vettori tangenti \vec{m}_0 e \vec{m}_1 . Cerchiamo una funzione polinomiale $p(t)$, di grado 3, definita sull'intervallo $[0, 1]$, che interpoli questi dati, ovvero tale che:

$$(4.1.1) \quad p(0) = B_0 \quad \frac{d}{dt}p(0) = \vec{m}_0 \quad p(1) = B_1 \quad \frac{d}{dt}p(1) = \vec{m}_1.$$

Quello che vogliamo fare è esprimere $p(t)$ come una curva di Bézier di grado 3: dobbiamo quindi cercare i quattro punti del poligono di controllo P_0, \dots, P_3 . Per interpolare i punti dati, il punto iniziale e quello finale del poligono di controllo devono coincidere con i punti che devono essere interpolati: $P_0 = B_0$ e $P_3 = B_1$. Ora dobbiamo tener conto delle derivate. Dalle (3.3.10) e (3.3.11) sappiamo che valgono:

$$(4.1.2) \quad \frac{d}{dt}p(0) = \frac{3!}{(3-1)!} \Delta^1 P_0 = 3(P_1 - P_0)$$

$$(4.1.3) \quad \frac{d}{dt}p(1) = \frac{3!}{(3-1)!}\Delta^1 P_2 = 3(P_3 - P_2)$$

quindi gli altri due punti P_1 e P_2 del poligono di controllo devono essere tali che:

$$(4.1.4) \quad \vec{m}_0 = 3(P_1 - P_0) \Rightarrow P_1 = P_0 + \frac{1}{3}\vec{m}_0 = B_0 + \frac{1}{3}\vec{m}_0$$

$$(4.1.5) \quad \vec{m}_1 = 3(P_3 - P_2) \Rightarrow P_2 = P_0 - \frac{1}{3}\vec{m}_1 = B_1 - \frac{1}{3}\vec{m}_1.$$

Sappiamo ovviamente, essendo una curva di Bézier, dare una forma esplicita alla funzione interpolante:

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{j=0}^3 P_j B_j^3(t) \\ &= P_0 B_0^3(t) + P_1 B_1^3(t) + P_2 B_2^3(t) + P_3 B_3^3(t) \\ &= B_0 B_0^3(t) + \left(B_0 + \frac{1}{3}\vec{m}_0\right) B_1^3(t) + \left(B_1 - \frac{1}{3}\vec{m}_1\right) B_2^3(t) + B_1 B_3^3(t). \end{aligned}$$

Quello che vogliamo fare ora è dare una forma canonica a questa funzione, mettendolo nella forma:

$$(4.1.6) \quad p(t) = B_0 H_0^3(t) + \vec{m}_0 H_1^3(t) + \vec{m}_1 H_2^3(t) + B_1 H_3^3(t)$$

dove abbiamo imposto che:

$$(4.1.7) \quad \begin{aligned} H_0^3(t) &= B_0^3(t) + B_1^3(t) \\ H_1^3(t) &= \frac{1}{3}B_1^3(t) \\ H_2^3(t) &= -\frac{1}{3}B_2^3(t) \\ H_3^3(t) &= B_2^3(t) + B_3^3(t). \end{aligned}$$

Definizione 4.1.1. Gli $H_i^3(t)$ per $i = 0, \dots, 3$ definiti dalla (4.1.7) sono detti *polinomi cubici di Hermite*.

In Figura 4.1 possiamo vedere i grafici dei polinomi di Hermite di grado 3 per $t \in [0, 1]$. In particolare: in rosso $H_0^3(t)$, in blu $H_1^3(t)$, in verde $H_2^3(t)$ e in celeste $H_3^3(t)$.

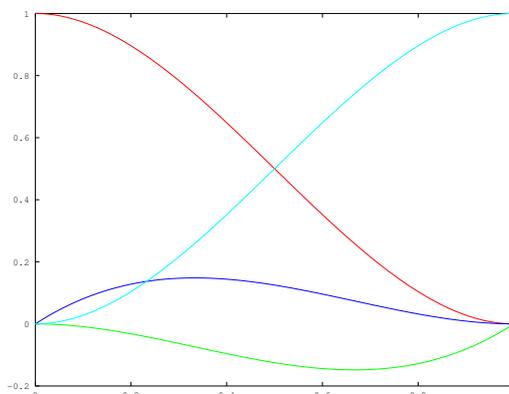


Figura 4.1: Polinomi di Hermite di grado 3

Analizziamo ora alcune importanti proprietà dei polinomi cubici di Hermite. Prima di tutto rispetto alla valutazione e alla derivazione per $t = 0$ e $t = 1$ sono uguali a uno per una sola di queste operazioni, e per le rimanenti sono uguali a zero. Infatti valgono:

$$\begin{aligned} H_0^3(t) &= B_0^3(t) + B_1^3(t) \\ &= \binom{3}{0} t^0(1-t)^3 + \binom{3}{1} t^1(1-t)^2 \\ &= (1-t)^3 + 3t(1-t)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H_0^3(t) &= \frac{d}{dt} B_0^3(t) + \frac{d}{dt} B_1^3(t) \\ &= 3(B_{-1}^2(t) - B_0^2(t) + B_0^2(t) - B_1^2(t)) \\ &= -3B_1^2(t) \\ &= -3 \binom{2}{1} t^1(1-t)^1 \\ &= -6t(1-t) \end{aligned}$$

$$(4.1.8) \quad \Rightarrow H_0^3(0) = 1 \quad \frac{d}{dt} H_0^3(0) = 0 \quad \frac{d}{dt} H_0^3(1) = 0 \quad H_0^3(1) = 0$$

$$\begin{aligned}
 H_1^3(t) &= \frac{1}{3}B_1^3(t) \\
 &= \frac{1}{3} \binom{3}{1} t^1(1-t)^2 \\
 &= t(1-t)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}H_1^3(t) &= \frac{1}{3} \frac{d}{dt}B_1^3(t) \\
 &= B_0^2(t) - B_1^2(t) \\
 &= \binom{2}{0} t^0(1-t)^2 - \binom{2}{1} t^1(1-t)^1 \\
 &= (1-t)^2 - 2t(1-t)
 \end{aligned}$$

$$(4.1.9) \quad \Rightarrow H_1^3(0) = 0 \quad \frac{d}{dt}H_1^3(0) = 1 \quad \frac{d}{dt}H_1^3(1) = 0 \quad H_1^3(1) = 0$$

$$\begin{aligned}
 H_2^3(t) &= -\frac{1}{3}B_2^3(t) \\
 &= -\frac{1}{3} \binom{3}{2} t^2(1-t)^1 \\
 &= t^2(t-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}H_2^3(t) &= -\frac{1}{3} \frac{d}{dt}B_2^3(t) \\
 &= B_2^2(t) - B_1^2(t) \\
 &= \binom{2}{2} t^2(1-t)^0 - \binom{2}{1} t^1(1-t)^1 \\
 &= t^2 - 2t(1-t)
 \end{aligned}$$

$$(4.1.10) \quad \Rightarrow H_2^3(0) = 0 \quad \frac{d}{dt}H_2^3(0) = 0 \quad \frac{d}{dt}H_2^3(1) = 1 \quad H_2^3(1) = 0$$

$$\begin{aligned}
 H_3^3(t) &= B_2^3(t) + B_3^3(t) \\
 &= \binom{3}{2} t^2(1-t)^1 + \binom{3}{3} t^3(1-t)^0 \\
 &= 3t^2(1-t) + t^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H_3^3(t) &= \frac{d}{dt}B_2^3(t) + \frac{d}{dt}B_3^3(t) \\
&= 3(B_1^2(t) - B_2^2(t) + B_2^2(t) - B_3^3(t)) \\
&= 3B_1^2(t) \\
&= 3 \binom{2}{1} t^1(1-t)^1 \\
&= 6t(1-t)
\end{aligned}$$

$$(4.1.11) \quad \Rightarrow H_3^3(0) = 0 \quad \frac{d}{dt}H_3^3(0) = 0 \quad \frac{d}{dt}H_3^3(1) = 0 \quad H_3^3(1) = 1$$

dove per dare le seguenti dimostrazioni abbiamo sfruttato la definizione di polinomio di Bernstein (3.2.1), la seconda della (3.2.2), e la derivata dei polinomi di Bernstein (3.3.1).

Citiamo un'altra importante proprietà dei polinomi H_i^3 che segue dalla geometria del problema. La (4.1.6) è una combinazione mista di punti e vettori, trasformiamola in una combinazione di soli vettori. Per ogni punto $P \in \mathbb{E}^3$ deve valere:

$$(4.1.12) \quad p(t) - P = (B_0 - P)H_0^3(t) + \vec{m}_0 H_1^3(t) + \vec{m}_1 H_2^3(t) + (B_1 - P)H_3^3(t)$$

ovvero

$$(4.1.13) \quad p(t) = B_0 H_0^3(t) + \vec{m}_0 H_1^3(t) + \vec{m}_1 H_2^3(t) + B_1 H_3^3(t) + P(H_0^3(t) + H_3^3(t) - 1).$$

Affinchè la (4.1.13) coincida con la (4.1.6) i coefficiente di P deve annullarsi. Deve quindi essere:

$$(4.1.14) \quad H_0^3(t) + H_3^3(t) \equiv 1.$$

Questo fatto, che mostra come la (4.1.6) abbia significato geometrico, è facile da verificare per come abbiamo definito i polinomi cubici di Hermite nella (4.1.7) e per la proprietà dei polinomi di Bernstein (3.2.4), infatti:

$$(4.1.15) \quad H_0^3(t) + H_3^3(t) = B_0^3(t) + B_1^3(t) + B_2^3(t) + B_3^3(t) = \sum_{j=0}^3 B_j^3(t) \equiv 1.$$

La funzione definita tramite i polinomi di Hermite dalla (4.1.6) ha una scomoda caratteristica: non è invariante sotto trasformazioni affini del dominio. Consideriamo la (4.1.6), che come abbiamo detto è definita sull'intervallo $[0, 1]$, e definiamo la seguente affinità: $\phi : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ definita da $\phi(t) = \hat{t} = (1 - t)a + tb$. Vediamo ora cosa succede alla nostra funzione interpolante sotto l'azione di tale affinità:

$$(4.1.16) \quad \hat{p}(\hat{t}) = B_0 \hat{H}_0^3(\hat{t}) + \vec{m}_0 \hat{H}_1^3(\hat{t}) + \vec{m}_1 \hat{H}_2^3(\hat{t}) + B_1 \hat{H}_3^3(\hat{t})$$

dove gli \hat{H}_i^3 sono definiti rispetto alla proprietà data dalle (4.1.8), (4.1.9), (4.1.10) e (4.1.11), ovvero devono valere:

$$(4.1.17) \quad \begin{array}{cccc} \hat{H}_0^3(a) = 1 & \frac{d}{d\hat{t}} \hat{H}_0^3(a) = 0 & \frac{d}{d\hat{t}} \hat{H}_0^3(b) = 0 & \hat{H}_0^3(b) = 0 \\ \hat{H}_1^3(a) = 0 & \frac{d}{d\hat{t}} \hat{H}_1^3(a) = 1 & \frac{d}{d\hat{t}} \hat{H}_1^3(b) = 0 & \hat{H}_1^3(b) = 0 \\ \hat{H}_2^3(a) = 0 & \frac{d}{d\hat{t}} \hat{H}_2^3(a) = 0 & \frac{d}{d\hat{t}} \hat{H}_2^3(b) = 1 & \hat{H}_2^3(b) = 0 \\ \hat{H}_3^3(a) = 0 & \frac{d}{d\hat{t}} \hat{H}_3^3(a) = 0 & \frac{d}{d\hat{t}} \hat{H}_3^3(b) = 0 & \hat{H}_3^3(b) = 1 \end{array}$$

quindi otteniamo la definizione degli \hat{H}_i^3 rispetto i vecchi polinomi cubici di Hermite:

$$(4.1.18) \quad \begin{array}{l} \hat{H}_0^3(\hat{t}) = H_0^3(t) \\ \hat{H}_1^3(\hat{t}) = (b - a)H_1^3(t) \\ \hat{H}_2^3(\hat{t}) = (b - a)H_2^3(t) \\ \hat{H}_3^3(\hat{t}) = H_3^3(t) \end{array}$$

dove $t \in [0, 1]$ è un parametro locale per l'intervallo $[a, b]$.

Se ora valutiamo la (4.1.16) in $\hat{t} = a$ e $\hat{t} = b$ ritroviamo $\hat{p}(a) = B_0$ e $\hat{p}(b) = B_1$. Ma nelle derivate ci sono dei cambiamenti:

$$(4.1.19) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{p}(\hat{t}) &= \frac{d}{d\hat{t}} \hat{p}(\hat{t}) \frac{d\hat{t}}{dt} \\ &= (b - a) \frac{d}{d\hat{t}} \hat{p}(\hat{t}) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \hat{p}(a) &= (b - a) \vec{m}_0 \quad \frac{d}{dt} \hat{p}(b) = (b - a) \vec{m}_1. \end{aligned}$$

Quindi se vogliamo che dopo un cambiamento di dominio le curve abbiano lo stesso supporto dobbiamo modificare i vettori tangenti: se la lunghezza

del dominio viene modificato da un fattore α dobbiamo sostituire i vettori \vec{m}_0 e \vec{m}_1 con $\frac{\vec{m}_0}{\alpha}$ e $\frac{\vec{m}_1}{\alpha}$ rispettivamente.

In Figura 4.2 possiamo vedere un esempio di interpolazione di Hermite di grado 3, dove $B_0 = (0, 0)$, $B_1 = (2, \frac{1}{2})$, $\vec{m}_0 = (1, 1)$ e $\vec{m}_1 = (1, -1)$.

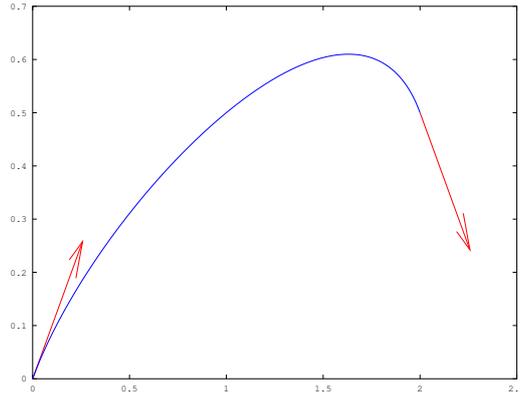


Figura 4.2: Interpolazione di Hermite di grado 3

4.2 Polinomi di Hermite di grado 5

Consideriamo ora un problema in cui entrano in gioco i valori delle derivate seconde: supponiamo di avere due punti B_0 e B_1 e assegnamo i valori dei rispettivi vettori tangenti \vec{m}_0 e \vec{m}_1 e i valori dei vettori delle derivate seconde \vec{s}_0 e \vec{s}_1 , e cerchiamo una funzione polinomiale $p(t)$, di grado 5, definita sull'intervallo $[0, 1]$, che interpoli questi dati, ovvero tale che:

$$(4.2.1) \quad \begin{aligned} p(0) &= B_0 & p(1) &= B_1 \\ \frac{d}{dt}p(0) &= \vec{m}_0 & \frac{d}{dt}p(1) &= \vec{m}_1 \\ \frac{d^2}{dt^2}p(0) &= \vec{s}_0 & \frac{d^2}{dt^2}p(1) &= \vec{s}_1. \end{aligned}$$

Procediamo come nella sezione precedente definendo $p(t)$ come una curva di Bézier di grado 5 e trovando i 6 punti del poligono di controllo P_0, \dots, P_5 . Il primo e l'ultimo punto devono essere i punti che vogliamo interpolare: $P_0 = B_0$ e $P_5 = B_1$. Poi imponiamo le condizioni date dalle derivate prime. Sempre dalle (3.3.10) e (3.3.11) sappiamo che valgono:

$$\frac{d}{dt}p(0) = \frac{5!}{(5-1)!} \Delta^1 P_0 = 5(P_1 - P_0)$$

$$\frac{d}{dt}p(1) = \frac{5!}{(5-1)!}\Delta^1 P_4 = 5(P_5 - P_4)$$

quindi i punti P_1 e P_4 devono essere tali che:

$$\begin{aligned}\vec{m}_0 &= 5(P_1 - P_0) \Rightarrow P_1 = P_0 + \frac{1}{5}\vec{m}_0 = B_0 + \frac{1}{5}\vec{m}_0 \\ \vec{m}_1 &= 5(P_5 - P_4) \Rightarrow P_4 = P_5 - \frac{1}{5}\vec{m}_1 = B_1 - \frac{1}{5}\vec{m}_1.\end{aligned}$$

Ora infine imponiamo le condizioni date dalle derivate seconde per trovare gli ultimi due punti P_2 e P_3 . Dalle (3.3.10) e (3.3.11) otteniamo:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}p(0) &= \frac{5!}{(5-2)!}\Delta^2 P_0 = 20(P_2 - 2P_1 + P_0) \\ \frac{d^2}{dt^2}p(1) &= \frac{5!}{(5-2)!}\Delta^2 P_3 = 20(P_5 - 2P_4 + P_3)\end{aligned}$$

quindi i punti P_2 e P_3 sono tali che:

$$\begin{aligned}\vec{s}_0 &= 20(P_2 - 2P_1 + P_0) \\ \Rightarrow P_2 &= -P_0 + 2P_1 + \frac{1}{20}\vec{s}_0 \\ &= -B_0 + 2\left(B_0 + \frac{1}{5}\vec{m}_0\right) + \frac{1}{20}\vec{s}_0 \\ &= B_0 + \frac{2}{5}\vec{m}_0 + \frac{1}{20}\vec{s}_0 \\ \vec{s}_1 &= 20(P_5 - 2P_4 + P_3) \\ \Rightarrow P_3 &= -P_5 + 2P_4 + \frac{1}{20}\vec{s}_1 \\ &= -B_1 + 2\left(B_1 - \frac{1}{5}\vec{m}_1\right) + \frac{1}{20}\vec{s}_1 \\ &= B_1 - \frac{2}{5}\vec{m}_1 + \frac{1}{20}\vec{s}_1.\end{aligned}$$

Diamo ora una forma esplicita alla funzione interpolante:

$$\begin{aligned}p(t) &= \sum_{j=0}^5 P_j B_j^5(t) \\ &= P_0 B_0^5(t) + P_1 B_1^5(t) + P_2 B_2^5(t) + P_3 B_3^5(t) + P_4 B_4^5(t) + P_5 B_5^5(t) \\ &= B_0 B_0^5(t) + \left(B_0 + \frac{1}{5}\vec{m}_0\right) B_1^5(t) + \left(B_0 + \frac{2}{5}\vec{m}_0 + \frac{1}{20}\vec{s}_0\right) B_2^5(t) \\ &\quad + \left(B_1 - \frac{2}{5}\vec{m}_1 + \frac{1}{20}\vec{s}_1\right) B_3^5(t) + \left(B_1 - \frac{1}{5}\vec{m}_1\right) B_4^5(t) + B_1 B_5^5(t).\end{aligned}$$

Come prima infine diamo una forma canonica a questa funzione:

(4.2.2)

$$p(t) = B_0 H_0^1(t) + \vec{m}_0 H_1^5(t) + \vec{s}_0 H_2^5(t) + \vec{s}_1 H_3^5(t) + \vec{m}_1 H_4^5(t) + B_1 H_5^5(t)$$

dove

$$(4.2.3) \quad \begin{aligned} H_0^5(t) &= B_0^5(t) + B_1^5(t) + B_2^5(t) \\ H_1^5(t) &= \frac{1}{5}(B_1^5(t) + 2B_2^5(t)) \\ H_2^5(t) &= \frac{1}{20}B_2^5(t) \\ H_3^5(t) &= -\frac{1}{20}B_3^5(t) \\ H_4^5(t) &= -\frac{1}{5}(2B_3^5(t) + B_4^5(t)) \\ H_5^5(t) &= B_3^5(t) + B_4^5(t) + B_5^5(t). \end{aligned}$$

Definizione 4.2.1. Gli $H_i^5(t)$ per $i = 0, \dots, 5$ definiti dalla (4.2.3) sono detti *polinomi di Hermite di grado 5*.

Osservazione 4.2.1. I polinomi di Hermite di grado 5 hanno proprietà analoghe ai polinomi cubici di Hermite, dimostrabili sempre con procedimenti analoghi.

In Figura 4.3 possiamo vedere i grafici dei polinomi di Hermite di grado 5 per $t \in [0, 1]$, ed in particolare: in rosso $H_0^5(t)$, in blu $H_1^5(t)$, in verde $H_2^5(t)$, in celeste $H_3^5(t)$, in rosa $H_4^5(t)$ e in giallo $H_5^5(t)$.

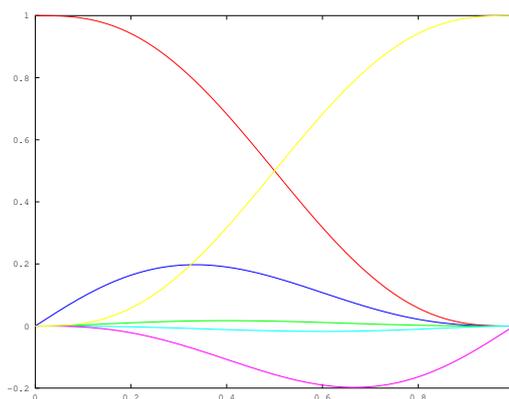


Figura 4.3: Polinomi di Hermite di grado 5

Invece in Figura 4.4 possiamo vedere un esempio di interpolazione di Hermite di grado 5, dove $B_0 = (0, 0)$, $B_1 = (2, \frac{1}{2})$, $\vec{m}_0 = (1, 1)$, $\vec{m}_1 = (1, -1)$ (che in figura sono in rosso), $\vec{s}_0 = (-1, 1)$ e $\vec{s}_1 = (0, 1)$ (che in figura sono in rosa).

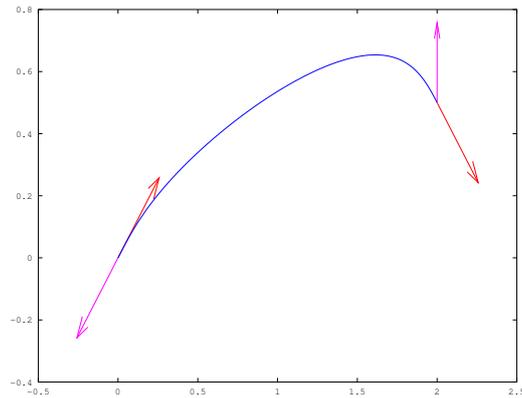


Figura 4.4: Interpolazione di Hermite di grado 5

Capitolo 5

Le spline di Bézier

Vogliamo ora introdurre una famiglia di curve molto significativa nell'ambito dell'interpolazione: le *spline*, ovvero curve polinomiali a tratti, ed in particolare noi lavoreremo con le *spline di Bézier*, dove i tratti sono delle curve di Bézier. In questo capitolo, in particolare, analizzeremo le proprietà delle spline cubiche e quadratiche.

Prima facciamo alcune considerazioni sui parametri che dovremo usare. Quando abbiamo considerato una singola curva di Bézier abbiamo supposto che fosse definita per t tale che $0 \leq t \leq 1$. Invece una spline s è una applicazione continua da una collezione di intervalli $[u_i, u_{i+1}]$ a \mathbb{E}^3 con $u_0 < \dots < u_L$, tale che la restrizione della spline ad ogni intervallo $[u_i, u_{i+1}]$ è una curva polinomiale. Ogni numero reale u_i è detto *nodo* (da non confondersi però con i nodi che abbiamo definito introducendo il problema dell'interpolazione nell'introduzione).

Ora, ad ogni valore del parametro u corrisponde un punto $s(u)$ della curva s . Supponiamo che $u \in [u_i, u_{i+1}]$ e introduciamo un parametro locale t per l'intervallo $[u_i, u_{i+1}]$:

$$(5.0.1) \quad t = \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} = \frac{u - u_i}{\Delta_i}$$

dove definiamo $\Delta_i = u_{i+1} - u_i$ per ogni $i = 0, \dots, L - 1$. Una spline sarà definita tramite il parametro globale u , invece ogni tratto della spline sarà definito da un parametro locale t . Inoltre denoteremo con s_i l' i -esimo tratto della spline, e con $s(u) = s_i(t)$ i suoi punti.

Osserviamo poi cosa succede alle derivate quando passiamo dal parametro u a quello locale $t \in [u_i, u_{i+1}]$:

$$(5.0.2) \quad \frac{d}{du}s(u) = \frac{d}{dt}s_i(t)\frac{dt}{du} = \frac{1}{\Delta_i}\frac{d}{dt}s_i(t).$$

Concludiamo questa introduzione dando la seguente definizione:

Definizione 5.0.2. I punti $s(u_i) = s_i(0) = s_{i-1}(1)$ sono detti *punti di giunzione*.

5.1 Condizioni di differenziabilità

Supponiamo di avere due curve di Bézier s_0 e s_1 di grado n , aventi rispettivamente come punti del poligono di controllo P_0, \dots, P_n e P_n, \dots, P_{2n} , e supponiamo che siano definite negli intervalli $[u_0, u_1]$ e $[u_1, u_2]$. Supponiamo ora che queste due curve, che denotiamo con s_0 e s_1 siano due archi di una stessa curva polinomiale $p(u)$, definita nell'intervallo $[u_0, u_2]$. Quindi per quanto detto nel paragrafo 3.5 i punti P_0, \dots, P_n e P_n, \dots, P_{2n} devono essere ottenuti da un processo di suddivisione. Quindi per la (3.5.5) deve valere la seguente relazione:

$$(5.1.1) \quad P_{n+i} = p_{n-i}^i(t^*) \quad \text{per } i = 0, \dots, n$$

$$\text{dove } t^* = \frac{u_2 - u_0}{u_1 - u_0}.$$

Supponiamo ora di cambiare il punto P_{2n} : ovviamente allora le due curve non saranno più descritte dalla stessa curva polinomiale globale, ma tutte le derivate dall'ordine 0 all'ordine $n-1$ nel punto $u = u_1$ rimarranno invariate, infatti per quanto già detto più volte il punto P_{2n} non influenza le derivate di ordine inferiore a n in $u = u_1$. Analogamente se cambiamo il punto P_{2n-r} rimarranno invariate tutte le derivate dall'ordine 0 a $n-r-1$ in $u = u_1$.

Possiamo quindi dare la seguente definizione:

Definizione 5.1.1. Date due curve di Bézier, definite per $u_0 \leq u \leq u_1$ e $u_1 \leq u \leq u_2$ dai poligoni di controllo P_0, \dots, P_n e P_n, \dots, P_{2n} , che supponiamo essere r volte derivabili in $u = u_1$, diciamo che abbiamo una *condizione di incollamento C^r* se vale:

$$(5.1.2) \quad P_{n+i} = p_{n-i}^i(t^*) \quad \text{per } i = 0, \dots, r$$

$$\text{dove } t^* = \frac{u_2 - u_0}{u_1 - u_0}.$$

Osservazione 5.1.1. Dalle espressione delle derivate delle curve di Bézier (3.3.9) (ed in particolare facendo riferimento alle (3.3.10) e a (3.3.11)) e dalla (5.0.2) possiamo riscrivere la condizione di incollamento \mathcal{C}^r come:

$$(5.1.3) \quad \left(\frac{1}{\Delta_0}\right)^i \Delta^i P_{n-i} = \left(\frac{1}{\Delta_1}\right)^i \Delta^i P_n \quad \text{per } i = 0, \dots, r.$$

Infatti quello che noi vogliamo è che nel punto di giunzione $u = u_1$ la spline sia r volte derivabile, quindi per ogni $i = 0, \dots, r$ deve valere:

$$(5.1.4) \quad \frac{d^i}{du^i} s_0(u_1) = \frac{d^i}{du^i} s_1(u_1)$$

ora applicando la (5.0.2) (iterata i volte) otteniamo:

$$(5.1.5) \quad \left(\frac{1}{\Delta_0}\right)^i \frac{d^i}{dt^i} s_0(1) = \left(\frac{1}{\Delta_1}\right)^i \frac{d^i}{dt^i} s_1(0)$$

ed applicando infine le (3.3.10) e (3.3.11) abbiamo:

$$(5.1.6) \quad \left(\frac{1}{\Delta_0}\right)^i \frac{n!}{(n-i)!} \Delta^i P_{n-i} = \left(\frac{1}{\Delta_1}\right)^i \frac{n!}{(n-i)!} \Delta^i P_n$$

$$(5.1.7) \quad \Rightarrow \left(\frac{1}{\Delta_0}\right)^i \Delta^i P_{n-i} = \left(\frac{1}{\Delta_1}\right)^i \Delta^i P_n.$$

Osservazione 5.1.2. Ora vogliamo sottolineare un fatto che fino ad ora abbiamo dato per scontato: finora abbiamo imposto che l'ultimo punto del poligono di controllo di s_0 coincidesse con il primo punto del poligono di controllo di s_1 . Ma l'uguaglianza fra questi due punti rappresenta la condizione di incollamento \mathcal{C}^0 , infatti per la proprietà delle curve di Bézier di passare per il punto iniziale e il punto finale del poligono di controllo, se questi due punti non fossero uguali la spline non sarebbe continua nel punto $s(u_1)$. Si può inoltre avere conferma di ciò applicando la (5.1.2) al caso $r = 0$, ottenendo che per il primo punto del poligono di controllo di s_1 , che chiamiamo Q deve valere:

$$(5.1.8) \quad Q = p_n^0(t) = \sum_{j=0}^0 P_{n+j} B_j^0(t) = P_n B_0^0(t) = P_n.$$

Adesso, visto che vogliamo concentrarci sulle proprietà delle spline cubiche e quadratiche, analizziamo in maniera più approfondita le condizioni di incollamento \mathcal{C}^1 e \mathcal{C}^2 .

5.1.1 Condizione di incollamento \mathcal{C}^1

Ovviamente per avere un incollamento di tipo \mathcal{C}^1 deve esserci prima di tutto un incollamento di tipo \mathcal{C}^0 , che come abbiamo appena visto è equivalente alla richiesta che il punto finale e il punto iniziale dei due poligoni di controllo devono coincidere. Cerchiamo ora le condizioni aggiuntive che dobbiamo imporre affinché si abbia un incollamento di tipo \mathcal{C}^1 .

Come sottolineato più volte gli unici punti che influenzano la derivata prima nel punto di giunzione P_n sono i punti P_{n-1} , P_n e P_{n+1} , determiniamo quindi come deve essere il punto P_{n+1} affinché ci sia un incollamento \mathcal{C}^1 . Sappiamo dalla (5.1.2) che deve valere $P_{n+1} = p_{n-1}^1(t^*)$. Vediamo ora che conseguenze ha questa condizione:

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= p_{n-1}^1(t^*) \\ &= \sum_{j=0}^1 P_{n-1+j} B_j^1(t^*) \\ &= P_{n-1} B_0^1(t^*) + P_n B_1^1(t^*) \\ &= (1 - t^*) P_{n-1} + t^* P_n. \end{aligned}$$

Possiamo quindi vedere subito che questo implica che i tre punti devono essere allineati, ma in realtà stiamo imponendo una condizione più forte, ovvero devono essere uguale il rapporto semplice tra i nodi u_0 , u_1 e u_2 e quello tra i punti P_{n-1} , P_n e P_{n+1} . Infatti abbiamo che il rapporto semplice tra i nodi è:

$$r(u_0, u_1, u_2) = \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_1}$$

invece il rapporto semplice tra i tre punti è:

$$\begin{aligned} r(P_{n-1}, P_n, P_{n+1}) &= \frac{P_n - P_{n-1}}{P_{n+1} - P_n} \\ &= \frac{P_n - P_{n-1}}{(1 - t^*) P_{n-1} + t^* P_n - P_n} \\ &= \frac{P_n - P_{n-1}}{(1 - t^*) P_{n-1} - (1 - t^*) P_n} \\ &= \frac{P_n - P_{n-1}}{(t^* - 1)(P_n - P_{n-1})} \\ &= \frac{1}{t^* - 1} \end{aligned}$$

ora ricordando che nella condizione di incollamento avevamo $t^* = \frac{u_2 - u_0}{u_1 - u_0}$ otteniamo:

$$\begin{aligned} r(P_{n-1}, P_n, P_{n+1}) &= \frac{1}{\frac{u_2 - u_0}{u_1 - u_0} - 1} \\ &= \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_0 - u_1 + u_0} \\ &= \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_1}. \end{aligned}$$

In realtà a queste conclusioni potevamo arrivare anche senza considerare la generica condizione di incollamento. Supponiamo infatti che s e t siano due parametri locali rispettivamente degli intervalli $[u_0, u_1]$ e $[u_1, u_2]$, e chiamiamo $s(u)$ una curva \mathcal{C}^1 composta da due tratti polinomiali, dove u è un parametro globale. Allora per la (5.0.2) vale la seguente catena di uguaglianze:

$$\frac{d}{du} s(u) = \frac{1}{\Delta_0} \frac{d}{ds} s_0(s) = \frac{1}{\Delta_1} \frac{d}{dt} s_1(t)$$

inoltre per le (3.3.10) e (3.3.11) valgono:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} s_0(1) &= \frac{n!}{(n-1)!} \Delta P_{n-1} = n \Delta P_{n-1} \\ \frac{d}{dt} s_1(0) &= \frac{n!}{(n-1)!} \Delta P_n = n \Delta P_n \end{aligned}$$

e quindi otteniamo:

$$(5.1.9) \quad \Delta_1 \Delta P_{n-1} = \Delta_0 \Delta P_n$$

equivalente alla condizione di prima che i tre punti siano allineati e che mantengano i rapporti semplici.

Osservazione 5.1.3. Sia s una spline \mathcal{C}^r definita su $u_0 < \dots < u_L$, e consideriamo la trasformazione affine dei parametri $v = \alpha + \beta u$, che per le proprietà delle curve di Bézier lascia invariate le coordinate dei punti della spline. Osserviamo inoltre che la condizione di incollamento (5.1.2) dipende solo dall'algoritmo di de Casteljau e dalla costante $\frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}}$, e che entrambi sono invarianti per l'affinità considerata. In altre parole una spline \mathcal{C}^r non è determinata da una unica sequenza dei nodi, ma da una famiglia di sequenze di nodi che si possono ottenere l'una dall'altra mediante trasformazioni affini

della retta reale in sè, come quella indicata prima.

Per determinare una sequenza di nodi che soddisfi un determinato problema di interpolazione dobbiamo partire dall'analisi della configurazione dei punti di De Boor. Per esempio affinché una spline sia di tipo \mathcal{C}^0 basta che i punti di giunzione coincidano, qualsiasi sia la sequenza dei nodi. Una spline non sarà mai di tipo \mathcal{C}^1 se i punti consecutivi ai punti di giunzione non sono allineati, qualsiasi sia la sequenza dei nodi. Supponiamo quindi ora che tutte le triplete di punti, al variare di i , P_{i-1} , P_i , P_{i+1} siano allineate, e costruiamo una sequenza di nodi in modo da avere una spline di tipo \mathcal{C}^1 . Siano $u_0 = 0$ e $u_1 = 1$ e costruiamo gli altri in modo che vengano rispettati i rapporti semplici:

$$(5.1.10) \quad \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} = \frac{\|\Delta P_{i-1}\|}{\|\Delta P_i\|}.$$

Abbiamo così ottenuto una sequenza di nodi, un'altra può essere ottenuta per esempio normalizzando ogni nodo u_i dividendo per u_L così che la spline sia definita sull'intervallo $[0, 1]$. In ogni caso, qualsiasi sia la nostra sequenza di nodi scelti, il supporto della spline non cambia, perchè essendo formata dall'incollamento di curve di Bézier, questo è univocamente determinato dai punti di De Boor.

5.1.2 Condizione di incollamento \mathcal{C}^2

Per un incollamento di tipo \mathcal{C}^2 , entrando in gioco anche le derivate seconde, ci dovranno essere delle condizioni sui punti P_{n-2} e P_{n+2} , senza ovviamente dimenticarci delle condizioni già ricavate, nelle sezione precedente, per i punti P_{n-1} , P_n e P_{n+1} per avere un incollamento di tipo \mathcal{C}^0 e \mathcal{C}^1 . Quello che vogliamo fare in questa sezione è dimostrare che per avere un incollamento di tipo \mathcal{C}^2 devono valere le seguenti condizioni:

$$(5.1.11) \quad P_{n-1} = (1 - t_1)P_{n-2} + t_1D$$

$$(5.1.12) \quad P_{n+1} = (1 - t_1)D + t_1P_{n+2}$$

dove $t_1 = \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_0}$ e D è il punto di intersezione tra le rette passanti per P_{n-2} , P_{n-1} e P_{n+1} , P_{n+2} .

In realtà quello che dimostreremo sarà solo la sufficienza di questa condizione. Per fare ciò prima di tutto riesprimiamo le condizioni di incollamento \mathcal{C}^1 e \mathcal{C}^2 nella seguente maniera:

(5.1.13)

$$P_{n+1} = \left(1 - \frac{u_2 - u_0}{u_1 - u_0}\right) P_{n-1} + \frac{u_2 - u_0}{u_1 - u_0} P_n = \frac{u_1 - u_2}{u_1 - u_0} P_{n-1} + \frac{u_2 - u_0}{u_1 - u_0} P_n$$

$$(5.1.14) \quad P_{n-2} = \frac{1}{1 - \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_0}} P_{n-1} - \frac{\frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_0}}{1 - \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_0}} D = \frac{u_2 - u_0}{u_2 - u_1} P_{n-1} - \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_1} D$$

$$(5.1.15) \quad P_{n+2} = \frac{1}{\frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_0}} P_{n+1} + \frac{1 - \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_0}}{\frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_0}} D = \frac{u_2 - u_0}{u_1 - u_0} P_{n+1} - \frac{u_2 - u_1}{u_1 - u_0} D.$$

Ora, come abbiamo fatto nella sezione precedente, supponiamo che s e t siano due parametri locali rispettivamente degli intervalli $[u_0, u_1]$ e $[u_1, u_2]$, e chiamiamo $s(u)$ una curva \mathcal{C}^2 composta da due tratti polinomiali, dove u è un parametro globale. Allora per la (5.0.2) vale la seguente catena di uguaglianze:

$$\frac{d^2}{du^2} s(u) = \left(\frac{1}{\Delta_0}\right)^2 \frac{d^2}{ds^2} s_0(s) = \left(\frac{1}{\Delta_1}\right)^2 \frac{d^2}{dt^2} s_1(t).$$

Per dimostrare che le (5.1.11) e (5.1.12) sono effettivamente delle condizioni sufficienti per l'incollamento di tipo \mathcal{C}^2 calcoliamo separatamente gli ultimi due membri dell'uguaglianza precedente, valutate rispettivamente in $s = 1$ e $t = 0$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta_0}\right)^2 \frac{d^2}{ds^2} s_0(1) &= \frac{1}{(u_1 - u_0)^2} \frac{d^2}{ds^2} s_0(1) \\ &= \frac{n!}{(n-2)!} \frac{1}{(u_1 - u_0)^2} \Delta^2 P_{n-2} \\ &= \frac{n!}{(n-2)!} \frac{1}{(u_1 - u_0)^2} (P_n - 2P_{n-1} + P_{n-2}) \end{aligned}$$

e sostituendo al posto di P_{n-2} la (5.1.14) otteniamo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta_0}\right)^2 \frac{d^2}{ds^2} s_0(1) &= \frac{n!}{(n-2)!} \frac{1}{(u_1 - u_0)^2} \left(P_n - 2P_{n-1} + \frac{u_2 - u_0}{u_2 - u_1} P_{n-1} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_1} D \right) \\ &= \frac{n!}{(n-2)!} \left(\frac{1}{(u_1 - u_0)^2} P_n + \frac{-u_2 + 2u_1 - u_0}{(u_2 - u_1)(u_1 - u_0)^2} P_{n-1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(u_2 - u_1)(u_1 - u_0)} D \right). \end{aligned}$$

Procediamo in maniera analoga con il secondo membro:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta_1}\right)^2 \frac{d^2}{dt^2} s_1(0) &= \frac{1}{(u_2 - u_1)^2} \frac{d^2}{dt^2} s_1(0) \\ &= \frac{n!}{(n-2)!} \frac{1}{(u_2 - u_1)^2} \Delta^2 P_n \\ &= \frac{n!}{(n-2)!} \frac{1}{(u_2 - u_1)^2} (P_{n+2} - 2P_{n+1} + P_n) \end{aligned}$$

sostituiamo quindi al posto di P_{n+2} la (5.1.15):

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta_1}\right)^2 \frac{d^2}{dt^2} s_1(0) &= \frac{n!}{(n-2)!} \frac{1}{(u_2 - u_1)^2} \left(\frac{u_2 - u_0}{u_1 - u_0} P_{n+1} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{u_2 - u_1}{u_1 - u_0} D - 2P_{n+1} + P_n \right) \\ &= \frac{n!}{(n-2)!} \frac{1}{(u_2 - u_1)^2} \left(\frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{u_1 - u_0} P_{n+1} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{u_2 - u_1}{u_1 - u_0} D + P_n \right) \end{aligned}$$

e sostituiamo infine al posto di P_{n+1} la (5.1.13):

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta_1}\right)^2 \frac{d^2}{dt^2} s_1(0) &= \frac{n!}{(n-2)!} \frac{1}{(u_2 - u_1)^2} \left[\frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{u_1 - u_0} \left(\frac{u_1 - u_2}{u_1 - u_0} P_{n-1} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{u_2 - u_0}{u_1 - u_0} P_n \right) - \frac{u_2 - u_1}{u_1 - u_0} D + P_n \right] \\ &= \frac{n!}{(n-2)!} \frac{1}{(u_2 - u_1)^2} \left(\frac{(u_2 - u_1)^2}{(u_1 - u_0)^2} P_n + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(u_2 - 2u_1 + u_0)(u_2 - u_0)}{(u_1 - u_0)^2} P_{n-1} - \frac{u_2 - u_1}{u_1 - u_0} D \right) \\ &= \frac{n!}{(n-2)!} \left(\frac{1}{(u_1 - u_0)^2} P_n + \frac{-u_2 + 2u_1 - u_0}{(u_1 - u_0)^2 (u_2 - u_1)} P_{n-1} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(u_2 - u_1)(u_1 - u_0)} D \right). \end{aligned}$$

Abbiamo quindi così dimostrato che se valgono le condizioni (5.1.11) e (5.1.12) allora abbiamo nel punto di giunzione della spline un incollamento di tipo \mathcal{C}^2 .

Osservazione 5.1.4. Possiamo osservare che le condizioni (5.1.11) e (5.1.12) non richiedono solamente l'esistenza del punto D di intersezione tra le rette

passanti per P_{n-2} , P_{n-1} e P_{n+1} , P_{n+2} , ma richiedono anche che siano mantenuti i rapporti semplici, ovvero che valgano $r(u_0, u_1, u_2) = r(P_{n-2}, P_{n-1}, D) = r(D, P_{n+1}, P_{n+2})$. Infatti valgono:

$$\begin{aligned}
 r(u_0, u_1, u_2) &= \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_1} \\
 r(P_{n-2}, P_{n-1}, D) &= \frac{P_{n-1} - P_{n-2}}{D - P_{n-1}} \\
 &= \frac{(1 - t_1)P_{n-2} + t_1D - P_{n-2}}{D - (1 - t_1)P_{n-2} - t_1D} \\
 &= \frac{t_1(D - P_{n-2})}{(1 - t_1)(D - P_{n-2})} \\
 &= \frac{t_1}{1 - t_1} \\
 &= \frac{\frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_0}}{1 - \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_0}} \\
 &= \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_0} \left(\frac{u_2 - u_0}{u_2 - u_0 - u_1 + u_0} \right) \\
 &= \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_1} \\
 r(D, P_{n+1}, P_{n+2}) &= \frac{P_{n+1} - D}{P_{n+2} - P_{n+1}} \\
 &= \frac{(1 - t_1)D + t_1P_{n+2} - D}{P_{n+2} - (1 - t_1)D - t_1P_{n+2}} \\
 &= \frac{t_1(P_{n+2} - D)}{(1 - t_1)(P_{n+2} - D)} \\
 &= \frac{t_1}{1 - t_1} \\
 &= \frac{\frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_0}}{1 - \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_0}} \\
 &= \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_0} \left(\frac{u_2 - u_0}{u_2 - u_0 - u_1 + u_0} \right) \\
 &= \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_1} .
 \end{aligned}$$

Osservazione 5.1.5. Vogliamo ora osservare che se non esiste un punto di intersezione D tra le rette individuate rispettivamente da P_{n-2} , P_{n-1} e

P_{n+1}, P_{n+2} , salta automaticamente la condizione di incollamento \mathcal{C}^2 . Consideriamo infatti il caso di rette parallele nel piano (che è equivalente al caso di rette parallele nello spazio) e il caso di rette sghembe nello spazio:

- rette parallele: senza perdita di generalità consideriamo i punti del poligono di controllo aventi come coordinate:

$$\begin{aligned} P_{n-2} &= (-b, a) \\ P_{n-1} &= (-b, 0) \\ P_n &= (0, 0) \\ P_{n+1} &= (c, 0) \\ P_{n+2} &= (c, d) \end{aligned}$$

dove a, b, c e d sono tutti numeri reali e b e c sono strettamente positivi. Calcoliamo ora le derivate in due tratti consecutivi di spline s_0 e s_1 nel punto di giunzione:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta_0}\right)^2 \frac{d^2}{ds^2} s_0(1) &= \left(\frac{1}{\Delta_0}\right)^2 \frac{n!}{(n-2)!} \Delta^2 P_{n-2} \\ &= \left(\frac{1}{\Delta_0}\right)^2 \frac{n!}{(n-2)!} (P_n - 2P_{n-1} + P_{n-2}) \\ &= \left(\frac{1}{\Delta_0}\right)^2 \frac{n!}{(n-2)!} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\Delta_0}\right)^2 \frac{n!}{(n-2)!} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta_1}\right)^2 \frac{d^2}{dt^2} s_1(0) &= \left(\frac{1}{\Delta_1}\right)^2 \frac{n!}{(n-2)!} \Delta^2 P_n \\ &= \left(\frac{1}{\Delta_1}\right)^2 \frac{n!}{(n-2)!} (P_{n+2} - 2P_{n+1} + P_n) \\ &= \left(\frac{1}{\Delta_1}\right)^2 \frac{n!}{(n-2)!} \left(\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\Delta_1}\right)^2 \frac{n!}{(n-2)!} \begin{bmatrix} -c \\ d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ma essendo sia b che c positivi per essere uguali le due derivate dovrebbe essere $b = c = 0$ ottenendo così l'assurdo.

- rette sghembe: come prima senza perdita di generalità consideriamo i punti del poligono di controllo aventi come coordinate:

$$\begin{aligned} P_{n-2} &= (a, 0, -b) \\ P_{n-1} &= (0, 0, -b) \\ P_n &= (0, 0, 0) \\ P_{n+1} &= (0, 0, c) \\ P_{n+2} &= (0, d, c) \end{aligned}$$

dove ancora a , b , c e d sono tutti numeri reali con b e c strettamente positivi. Calcoliamo le derivate:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta_0}\right)^2 \frac{d^2}{ds^2} s_0(1) &= \left(\frac{1}{\Delta_0}\right)^2 \frac{n!}{(n-2)!} \Delta^2 P_{n-2} \\ &= \left(\frac{1}{\Delta_0}\right)^2 \frac{n!}{(n-2)!} (P_n - 2P_{n-1} + P_{n-2}) \\ &= \left(\frac{1}{\Delta_0}\right)^2 \frac{n!}{(n-2)!} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ -b \end{bmatrix} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\Delta_0}\right)^2 \frac{n!}{(n-2)!} \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta_1}\right)^2 \frac{d^2}{dt^2} s_1(0) &= \left(\frac{1}{\Delta_1}\right)^2 \frac{n!}{(n-2)!} \Delta^2 P_n \\ &= \left(\frac{1}{\Delta_1}\right)^2 \frac{n!}{(n-2)!} (P_{n+2} - 2P_{n+1} + P_n) \\ &= \left(\frac{1}{\Delta_1}\right)^2 \frac{n!}{(n-2)!} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ d \\ c \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\Delta_1}\right)^2 \frac{n!}{(n-2)!} \begin{bmatrix} 0 \\ d \\ -c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ma per essere uguali le due derivate dovrebbe essere $a = b = c = d = 0$ ottenendo nuovamente l'assurdo.

5.1.3 Continuità geometrica

Vogliamo ora presentare un'altro tipo di incollamento, meno rigido dell'incollamento di tipo C^r , dove entrano in gioco caratteristiche più geometriche,

e proprio per questo prende il nome di *continuità geometrica*. Diamo dunque la seguente definizione:

Definizione 5.1.2. Diciamo che due tratti di spline s_{i-1} e s_i si raccordano con *continuità geometrica di tipo G^r* nel punto $B_i := s_{i-1}(u_i) = s_i(u_i)$ se esiste una riparametrizzazione di s_i , che conserva l'orientazione, tale che dopo la riparametrizzazione si abbia un incollamento di tipo C^r in B_i .

Vogliamo ora analizzare che relazioni implicano le continuità di tipo G^1 e G^2 . Consideriamo quindi due tratti della spline $s_0(u)$ e $s_1(t)$, definiti rispettivamente per $u \in [u_0, u_1]$ e $t \in [t_1, t_2]$ e riparametriamo il secondo con una $u(t) : [t_1, t_2] \rightarrow [u_1, u_2]$ (questa parametrizzazione ha senso solo se $\frac{dt}{du} > 0$) e vogliamo che dopo la riparametrizzazione valga:

$$(5.1.16) \quad \frac{d}{du} s_0(u_1) = \frac{d}{du} s_1(u_1)$$

quindi c'è un incollamento di tipo G^1 se vale:

$$(5.1.17) \quad \frac{d}{du} s_0(u_1) = \frac{d}{dt} s_1(t_1) \frac{dt}{du} = \alpha \frac{d}{dt} s_1(t_1) \quad \alpha > 0$$

quindi in pratica si impone che la retta tangente vari con continuità: i vettori tangenti in arrivo e in partenza differiscono solo per il modulo. Procediamo nella stessa maniera per la continuità di tipo G^2 . Deve valere:

$$(5.1.18) \quad \frac{d^2}{du^2} s_0(u_1) = \frac{d^2}{du^2} s_1(u_1)$$

ma vale

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{du^2} s_1(u_1) &= \frac{d}{du} \left(\frac{d}{dt} s_1(t_1) \frac{dt}{du} \right) \\ &= \frac{d^2}{dt^2} s_1(t_1) \frac{dt}{du} \frac{dt}{du} + \frac{d}{dt} s_1(t_1) \frac{d^2 t}{du^2} \end{aligned}$$

quindi si ha un incollamento di tipo G^2 se vale:

$$(5.1.19) \quad \frac{d^2}{du^2} s_0(u_1) = (\alpha)^2 \frac{d^2}{dt^2} s_1(t_1) + \beta \frac{d}{dt} s_1(t_1) \quad \alpha > 0 \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Osservazione 5.1.6. Un'importante proprietà dell'incollamento di tipo G^2 è che mantiene invariata la curvatura κ . Infatti vale:

$$\begin{aligned}
\lim_{u \rightarrow u_1} \kappa &= \frac{\left\| \frac{d}{du} s_0(u_1) \wedge \frac{d^2}{du^2} s_0(u_1) \right\|}{\left(\left\| \frac{d}{du} s_0(u_1) \right\| \right)^3} \\
&= \frac{\left\| \alpha \frac{d}{dt} s_1(t_1) \wedge \left((\alpha)^2 \frac{d^2}{dt^2} s_1(t_1) + \beta \frac{d}{dt} s_1(t_1) \right) \right\|}{\left(\left\| \alpha \frac{d}{dt} s_1(t_1) \right\| \right)^3} \\
&= \frac{\left\| \alpha \frac{d}{dt} s_1(t_1) \wedge (\alpha)^2 \frac{d^2}{dt^2} s_1(t_1) \right\|}{\left(\left\| \alpha \frac{d}{dt} s_1(t_1) \right\| \right)^3} \\
&= \frac{\left\| (\alpha)^3 \frac{d}{dt} s_1(t_1) \wedge \frac{d^2}{dt^2} s_1(t_1) \right\|}{\left(\left\| \alpha \frac{d}{dt} s_1(t_1) \right\| \right)^3} \\
&= \frac{(\alpha)^3 \left\| \frac{d}{dt} s_1(t_1) \wedge \frac{d^2}{dt^2} s_1(t_1) \right\|}{(\alpha)^3 \left(\left\| \frac{d}{dt} s_1(t_1) \right\| \right)^3} \\
&= \lim_{t \rightarrow t_1} \kappa.
\end{aligned}$$

5.2 Spline di Bézier quadratica di tipo \mathcal{C}^1

Consideriamo ora una spline quadratica di tipo \mathcal{C}^1 $s(u)$ definita su L intervalli tali che $u_0 \leq \dots \leq u_L$. Abbiamo L curve di Bézier di grado 2, quindi dobbiamo trovare i punti $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{2L-2}, P_{2L-1}, P_{2L}$, dove i punti P_{2i} , per $i \neq 0$ e $i \neq L$, sono i punti di giunzione e i punti P_{2i+1} uniti a P_0 e P_L sono detti *punti di De Boor*. Ora per la condizione di incollamento \mathcal{C}^1 i punti di giunzione devono essere tali che:

$$(5.2.1) \quad P_{2i} = \frac{\Delta_i}{\Delta_i + \Delta_{i-1}} P_{2i-1} + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i + \Delta_{i-1}} P_{2i+1} \quad \text{per } i = 1, \dots, L-1.$$

Osservazione 5.2.1. Per come abbiamo definito la sequenza dei punti della spline, e quindi con la richiesta di mantenere i rapporti semplici, la spline non dipende solo dai punti di De Boor, ma anche dalla sequenza di nodi. Infatti esistono spline che hanno gli stessi punti di giunzione, e che sono definiti sullo stesso intervallo, ma avendo una diversa distribuzione dei nodi generano curve diverse.

Osservazione 5.2.2. Vogliamo ora sottolineare una importante caratteristica delle curve spline che le distinguono dalle singole curve di Bézier: c'è un controllo locale. Infatti se considero una spline quadratica di tipo \mathcal{C}^1 e cambiamo uno dei punti di De Boor questo influenzerà al massimo 3 tratti

della spline, mentre gli altri rimangono invariati, e una proprietà analoga si estende a tutti i tipi di spline. Un esempio di ciò lo possiamo vedere in Figura 5.1 dove abbiamo interpolato prima i punti $B_0 = (0, 0)$, $B_1 = (2, 1)$, $B_2 = (3, 2)$, $B_3 = (4, 4)$ e $B_4 = (6, 3)$ con nodi equidistanziati sull'intervallo $[0, 4]$ (in figura in blu con poligono di controllo in rosso) e poi abbiamo cambiato il punto B_1 con il punto $B_1^* = (2, \frac{1}{2})$ (in figura in celeste con poligono di controllo in rosa).

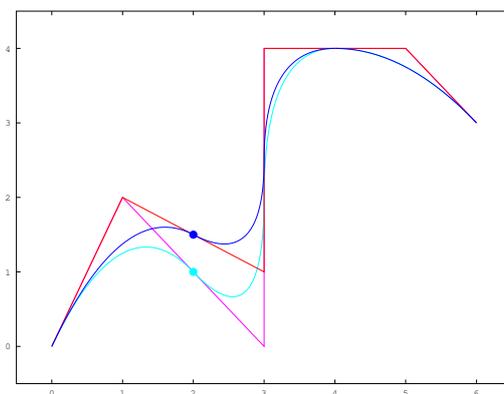


Figura 5.1: Controllo locale

Osservazione 5.2.3. Osserviamo inoltre che nella (5.2.1) abbiamo lasciato liberi i punti iniziale P_0 e finale P_{2L} . In questa maniera otteniamo una curva aperta, ma in realtà con le spline possiamo anche definire una curva chiusa, e per mantenere le richieste di continuità e di incollamento di tipo \mathcal{C}^1 basta imporre che $P_0 = P_{2L}$ e:

$$(5.2.2) \quad P_0 = P_{2L} = \frac{\Delta_0}{\Delta_0 + \Delta_{L-1}} P_{2L-1} + \frac{\Delta_{L-1}}{\Delta_0 + \Delta_{L-1}} P_1 \quad .$$

5.3 Spline di Bézier cubica di tipo \mathcal{C}^2

Consideriamo ora una spline cubica di tipo \mathcal{C}^2 $s(u)$ definita sempre su L intervalli tali che $u_0 \leq \dots \leq u_L$. Quindi, come prima, abbiamo L curve di Bézier ma di grado 3. In questo caso dobbiamo quindi definire i punti $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_{2L-3}, P_{2L-2}, P_{2L-1}, P_{2L}$, dove i punti P_{3i} sono i punti di giunzione. In questo caso si definiscono *punti di De Boor* i primi due, gli ultimi due e i punti aggiuntivi D_i introdotti qui sotto. Ora per la condizione di incollamento \mathcal{C}^1 i punti di giunzione devono essere tali che:

$$(5.3.1) \quad P_{3i} = \frac{\Delta_i}{\Delta_i + \Delta_{i-1}} P_{3i-1} + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i + \Delta_{i-1}} P_{3i+1} \quad \text{per } i = 1, \dots, L-1.$$

Invece per imporre la condizione di incollamento \mathcal{C}^2 abbiamo bisogno dei punti aggiuntivi D_i con $i = 2, \dots, L-2$ tali da rispettare le seguenti uguaglianze:

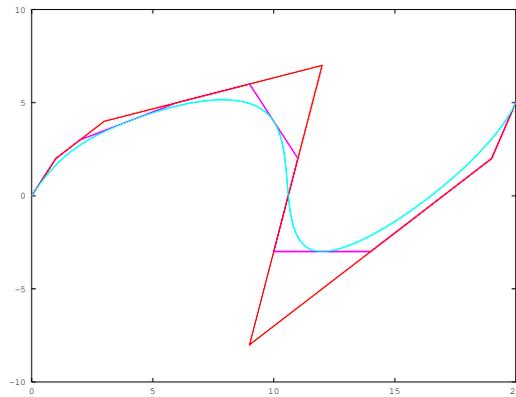
$$(5.3.2) \quad P_{3i-2} = \frac{\Delta_{i-1} + \Delta_i}{\Delta_{i-2} + \Delta_{i-1} + \Delta_i} D_{i-1} + \frac{\Delta_{i-2}}{\Delta_{i-2} + \Delta_{i-1} + \Delta_i} D_i$$

$$(5.3.3) \quad P_{3i-1} = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-2} + \Delta_{i-1} + \Delta_i} D_{i-1} + \frac{\Delta_{i-2} + \Delta_{i-1}}{\Delta_{i-2} + \Delta_{i-1} + \Delta_i} D_i$$

Per quanto riguarda i punti iniziali e finali dobbiamo però dare una definizione a parte:

$$(5.3.4) \quad \begin{aligned} P_0 &= D_{-1} \\ P_1 &= D_0 \\ P_2 &= \frac{\Delta_1}{\Delta_0 + \Delta_1} D_0 + \frac{\Delta_0}{\Delta_0 + \Delta_1} D_1 \\ P_{3L-2} &= \frac{\Delta_{L-1}}{\Delta_{L-2} + \Delta_{L-1}} D_{L-1} + \frac{\Delta_{L-2}}{\Delta_{L-2} + \Delta_{L-1}} D_L \\ P_{3L-1} &= D_L \\ P_{3L} &= D_{L+1}. \end{aligned}$$

In Figura 5.2 possiamo vedere un esempio di spline cubica con incollamento \mathcal{C}^2 dove i punti $B_0 = (0, 0)$, $B_1 = (4, 4)$, $B_2 = (10, 4)$, $B_3 = (12, -3)$ e $B_4 = (20, 5)$ sono stati interpolati con nodi distribuiti uniformemente sull'intervallo $[0, 4]$.

Figura 5.2: Spline cubica di tipo \mathcal{C}^2

Osservazione 5.3.1. Come per le spline quadratiche anche le spline cubiche hanno la proprietà di controllo locale, anche se è leggermente più debole, infatti se cambiamo uno dei punti di De Boor D_i fino a quattro tratti della curva vengono modificati.

Capitolo 6

Interpolazione mediante spline

Come abbiamo visto nel paragrafo 2.2 l'interpolazione mediante polinomi non è molto pratica. Molto più efficaci sono i metodi che struttano funzioni polinomiali a tratti, ovvero le spline. Illustreremo in questo capitolo diversi problemi di interpolazione che risolveremo sfruttando le spline cubiche.

6.1 Spline cubiche di tipo \mathcal{C}^1

6.1.1 Problema di interpolazione I: Metodo di Hermite

Supponiamo di assegnare $L+1$ punti B_0, \dots, B_L , con i rispettivi nodi u_0, \dots, u_L e vettori tangenti $\vec{m}_0, \dots, \vec{m}_L$. Vogliamo cercare una spline cubica $s(u)$ di tipo \mathcal{C}^1 che interpoli i dati, ovvero tale che:

$$(6.1.1) \quad s(u_i) = B_i \quad \frac{d}{du}s(u_i) = \vec{m}_i \quad \text{per } i = 0, \dots, L.$$

Cerchiamo quindi i punti $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_{3L}, P_{3L+1}, P_{3L+2}, P_{3(L+1)}$ che definiranno univocamente ogni tratto. Sicuramente i punti di giunzione devono essere i punti che devono essere interpolati: $P_{3i} = B_i$ per ogni $i = 0, \dots, L$. Ora per trovare gli altri dobbiamo imporre le condizioni di incollamento \mathcal{C}^1 , quindi riprendiamo le formule trovate nel paragrafo 5.1.1 ricaviamo:

$$(6.1.2) \quad \frac{d}{du}s(u_i) = \frac{3}{\Delta_{i-1}}(P_{3i} - P_{3i-1}) = \frac{3}{\Delta_i}(P_{3i+1} - P_{3i})$$

quindi i punti devono essere tali che:

$$(6.1.3) \quad \frac{3}{\Delta_{i-1}}(P_{3i} - P_{3i-1}) = \vec{m}_i \Rightarrow P_{3i-1} = P_{3i} - \frac{\Delta_{i-1}}{3}\vec{m}_i \quad \text{per } i = 1, \dots, L$$

$$(6.1.4) \quad \frac{3}{\Delta_i}(P_{3i+1} - P_{3i}) = \vec{m}_i \Rightarrow P_{3i+1} = P_{3i} + \frac{\Delta_i}{3}\vec{m}_i \quad \text{per } i = 0, \dots, L-1.$$

In realtà per risolvere questo problema possiamo sfruttare quanto spiegato nel capitolo 4, quindi, per ogni intervallo $[u_i, u_{i+1}]$, l'interpolante $s(u)$ può essere espressa in funzione dei polinomi cubici di Hermite, che dobbiamo però ridefinire nel seguente modo:

$$(6.1.5) \quad \begin{aligned} \hat{H}_0^3(u) &= B_0^3(t) + B_1^3(t) \\ \hat{H}_1^3(u) &= \frac{\Delta_i}{3}B_1^3(t) \\ \hat{H}_2^3(u) &= -\frac{\Delta_i}{3}B_2^3(t) \\ \hat{H}_3^3(u) &= B_2^3(t) + B_3^3(t) \end{aligned}$$

dove $t = \frac{u - u_i}{\Delta_i}$ è un parametro locale in $[u_i, u_{i+1}]$. Possiamo quindi esprimere la funzione interpolante come:

$$(6.1.6) \quad s(u) = B_i \hat{H}_0^3(u) + \vec{m}_i \hat{H}_1^3(u) + \vec{m}_{i+1} \hat{H}_2^3(u) + B_{i+1} \hat{H}_3^3(u).$$

6.1.2 Problema di interpolazione II

Consideriamo ora il seguente problema: supponiamo dati $L+1$ punti B_0, \dots, B_L e i rispettivi nodi u_0, \dots, u_L e vogliamo cercare una spline cubica di tipo \mathcal{C}^1 che interpoli questi dati.

Per risolvere il problema vogliamo determinare i vettori tangenti \vec{m}_i nei punti da interpolare e applicare poi quanto visto nella sezione precedente. Per trovare i vettori abbiamo diversi metodi. Il primo sfrutta le così dette *tangenti di Bessel*. L'idea è quella di considerare la parabola $q_i(u)$ che interpola i punti B_{i-1} , B_i e B_{i+1} nei valori u_{i-1} , u_i e u_{i+1} e definire il vettore tangente come:

$$(6.1.7) \quad \vec{m}_i = \frac{d}{du} q_i(u_i) \quad \text{per } i = 1, \dots, L-1$$

ottenendo in forma esplicita:

$$(6.1.8) \quad \vec{m}_i = \frac{1 - \alpha_i}{\Delta_{i-1}} \Delta B_{i-1} + \frac{\alpha_i}{\Delta_i} \Delta B_i \quad \text{per } i = 1, \dots, L - 1$$

dove

$$(6.1.9) \quad \alpha_i = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_{i-1} + \Delta_i}.$$

Invece per il punto finale e il punto iniziale definiamo il vettore tangente nella seguente maniera:

$$(6.1.10) \quad \vec{m}_0 = \frac{d}{du} q_1(u_0) \Rightarrow \vec{m}_0 = 2 \frac{\Delta B_0}{\Delta_0} - \vec{m}_1$$

$$(6.1.11) \quad \vec{m}_L = \frac{d}{du} q_{L-1}(u_L) \Rightarrow \vec{m}_L = 2 \frac{\Delta B_{L-1}}{\Delta_{L-1}} - \vec{m}_{L-1}.$$

Verifichiamo ora che la (6.1.7) implica la (6.1.8). Prima di tutto esprimiamo la parabola q_i come una curva di Bézier di grado 2. Consideriamo l'affinità tra i parametri

$$(6.1.12) \quad t = \frac{u - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_{i-1}} = \frac{u - u_{i-1}}{\Delta_i + \Delta_{i-1}}$$

e cerchiamo la curva q_i in modo tale che:

$$(6.1.13) \quad \begin{aligned} q_i(t(u_{i-1})) &= q_i(0) = B_{i-1} \\ q_i(t(u_{i+1})) &= q_i(1) = B_{i+1}. \end{aligned}$$

Ora per quanto visto nel paragrafo 3.1, sappiamo di poter esprimere la parabola q_i nella seguente maniera:

$$(6.1.14) \quad q_i(u) = B_{i-1}(1 - t)^2 + 2C_i t(1 - t) + B_{i+1}t^2.$$

Imponiamo ora nella (6.1.14) il passaggio per il punto B_i , ovvero deve essere $q_i(u_i) = B_i$:

$$\begin{aligned}
B_i = q_i(u_i) &= B_{i-1} \left(1 - \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_{i-1}} \right)^2 + 2C_i \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_{i-1}} \left(1 + \right. \\
&\quad \left. - \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_{i-1}} \right) + B_{i+1} \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_{i-1}} \right)^2 \\
&= B_{i-1} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{u_{i+1} - u_{i-1}} \right)^2 + 2C_i \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_{i-1}} \right) \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{u_{i+1} - u_{i-1}} \right) + \\
&\quad + B_{i+1} \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_{i-1}} \right)^2 \\
&= B_{i-1} \left(\frac{\Delta_i}{\Delta_i + \Delta_{i-1}} \right)^2 + 2C_i \frac{\Delta_{i-1} \Delta_i}{(\Delta_i + \Delta_{i-1})^2} + B_{i+1} \left(\frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i + \Delta_{i-1}} \right)^2 \\
(6.1.15) \quad &\Rightarrow 2C_i = -B_{i-1} \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} + B_i \frac{(\Delta_i + \Delta_{i-1})^2}{\Delta_{i-1} \Delta_i} - B_{i+1} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}.
\end{aligned}$$

Tramite la (6.1.15) scriviamo la parabola q_i in funzione dei punti da interpolare B_{i-1} , B_i e B_{i+1} :

$$\begin{aligned}
q_i(u) &= \left((1-t)^2 - \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} t(1-t) \right) B_{i-1} + \frac{(\Delta_i + \Delta_{i-1})^2}{\Delta_{i-1} \Delta_i} t(1-t) B_i + \\
&\quad + \left(t^2 - \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} t(1-t) \right) B_{i+1}.
\end{aligned}$$

Deriviamola dunque rispetto a u :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du} q_i(u) &= \frac{d}{dt} q_i(t) \frac{dt}{du} \\
&= \frac{1}{\Delta_i + \Delta_{i-1}} \frac{d}{dt} q_i(t) \\
&= \frac{1}{\Delta_i + \Delta_{i-1}} \left[\left(-2(1-t) - \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} (1-2t) \right) B_{i-1} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\Delta_i + \Delta_{i-1})^2}{\Delta_{i-1} \Delta_i} (1-2t) B_i + \left(2t - \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} (1-2t) \right) B_{i+1} \right] \\
&= \frac{1}{\Delta_i + \Delta_{i-1}} \left[\left(-2 \left(1 - \frac{u - u_{i-1}}{\Delta_i + \Delta_{i-1}} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} \left(1 - 2 \frac{u - u_{i-1}}{\Delta_i + \Delta_{i-1}} \right) \right) B_{i-1} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\Delta_i + \Delta_{i-1})^2}{\Delta_{i-1} \Delta_i} \left(1 - 2 \frac{u - u_{i-1}}{\Delta_i + \Delta_{i-1}} \right) B_i + \right. \\
&\quad \left. + \left(2 \frac{u - u_{i-1}}{\Delta_i + \Delta_{i-1}} - \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} \left(1 - 2 \frac{u - u_{i-1}}{\Delta_i + \Delta_{i-1}} \right) \right) B_{i+1} \right]
\end{aligned}$$

e valutiamola in u_i :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du}q_i(u_i) &= \frac{1}{\Delta_i + \Delta_{i-1}} \left[\left(-2 \left(1 - \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i + \Delta_{i-1}} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} \left(1 - 2 \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i + \Delta_{i-1}} \right) \right) B_{i-1} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\Delta_i + \Delta_{i-1})^2}{\Delta_{i-1}\Delta_i} \left(1 - 2 \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i + \Delta_{i-1}} \right) B_i + \right. \\
&\quad \left. + \left(2 \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i + \Delta_{i-1}} - \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} \left(1 - 2 \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i + \Delta_{i-1}} \right) \right) B_{i+1} \right] \\
&= \frac{1}{\Delta_i + \Delta_{i-1}} \left[-\frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} B_{i-1} + \left(\frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} - \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} \right) B_i + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} B_{i+1} \right] \\
&= \frac{1}{\Delta_i + \Delta_{i-1}} \left[\frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} \Delta B_{i-1} + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} \Delta B_i \right] \\
&= \frac{1 - \alpha_i}{\Delta_{i-1}} \Delta B_{i-1} + \frac{\alpha_i}{\Delta_i} \Delta B_i.
\end{aligned}$$

Verifichiamo infine la (6.1.10) (analogamente si potrà verificare la (6.1.11)).

Riscriviamo la derivata di q_1 :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du}q_1(u) &= \frac{1}{\Delta_1 + \Delta_0} \left[\left(-2 \left(1 - \frac{u - u_0}{\Delta_1 + \Delta_0} \right) - \frac{\Delta_1}{\Delta_0} \left(1 - 2 \frac{u - u_0}{\Delta_1 + \Delta_0} \right) \right) B_0 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\Delta_1 + \Delta_0)^2}{\Delta_0\Delta_1} \left(1 - 2 \frac{u - u_0}{\Delta_1 + \Delta_0} \right) B_1 + \right. \\
&\quad \left. + \left(2 \frac{u - u_0}{\Delta_1 + \Delta_0} - \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \left(1 - 2 \frac{u - u_0}{\Delta_1 + \Delta_0} \right) \right) B_2 \right]
\end{aligned}$$

ricordando poi che vale:

$$\begin{aligned}
\vec{m}_1 &= \frac{(1 - \alpha_1)}{\Delta_0} \Delta B_0 + \frac{\alpha_1}{\Delta_1} \Delta B_1 \\
&= \frac{1}{\Delta_0 + \Delta_1} \left[-\frac{\Delta_1}{\Delta_0} B_0 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0} - \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right) B_1 + \frac{\Delta_0}{\Delta_1} B_2 \right] \\
&= \frac{1}{\Delta_0 + \Delta_1} \left[-\frac{\Delta_1}{\Delta_0} B_0 + \frac{(\Delta_1)^2 - (\Delta_0)^2}{\Delta_0\Delta_1} B_1 + \frac{\Delta_0}{\Delta_1} B_2 \right]
\end{aligned}$$

otteniamo quindi:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du}q_1(u_0) &= \frac{1}{\Delta_1 + \Delta_0} \left[-\frac{2\Delta_0 + \Delta_1}{\Delta_0} B_0 + \frac{(\Delta_1 + \Delta_0)^2}{\Delta_0 \Delta_1} B_1 - \frac{\Delta_0}{\Delta_1} B_2 \right] \\
&= \frac{1}{\Delta_1 + \Delta_0} \left[\left(-2\frac{\Delta_0 + \Delta_1}{\Delta_0} + \frac{\Delta_1}{\Delta_0} \right) B_0 + \right. \\
&\quad \left. + \left(2\frac{(\Delta_1)^2 + \Delta_0 \Delta_1}{\Delta_0 \Delta_1} + \frac{(\Delta_0)^2 - (\Delta_1)^2}{\Delta_0 \Delta_1} \right) B_1 - \frac{\Delta_0}{\Delta_1} B_2 \right] \\
&= \frac{2}{\Delta_1 + \Delta_0} \left(-\frac{\Delta_0 + \Delta_1}{\Delta_0} B_0 + \frac{\Delta_0 + \Delta_1}{\Delta_0} B_1 \right) - \vec{m}_1 \\
&= \frac{2}{\Delta_0} \Delta B_0 - \vec{m}_1.
\end{aligned}$$

In Figura 6.1 possiamo vedere un esempio di questo tipo di interpolazione, dove $B_0 = (0, 0)$, $B_1 = (2, 1)$, $B_2 = (3, 2)$, $B_3 = (4, 4)$ e $B_4 = (6, 3)$ con nodi equidistanti sull'intervallo $[0, 4]$, e i vettori tangenti di Bessel sono evidenziati in figura in rosso.

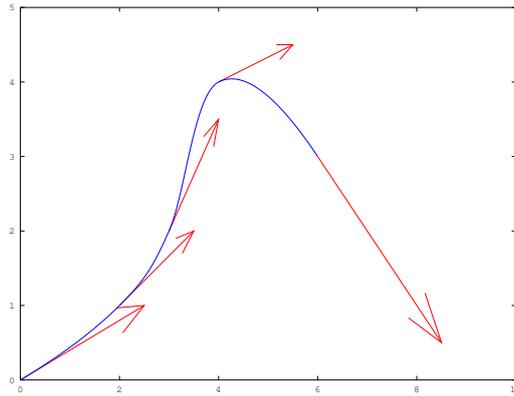


Figura 6.1: Interpolazione spline con tangenti di Bessel

Un'altra scelta dei vettori tangenti, altrettanto efficace, è stata proposta da H. Akima [Aki70]:

$$(6.1.16) \quad \vec{m}_i = (1 - c_i)a_{i-1} + c_i a_i$$

dove:

$$(6.1.17) \quad a_i = \frac{\Delta B_i}{\Delta_i} \quad \text{e} \quad c_i = \frac{\|\Delta a_{i-1}\|}{\|\Delta a_{i-1}\| + \|\Delta a_i\|}.$$

In Figura 6.2 abbiamo interpolato gli stessi punti e con gli stessi nodi di Figura 6.1 usando però il metodo di H. Akima.

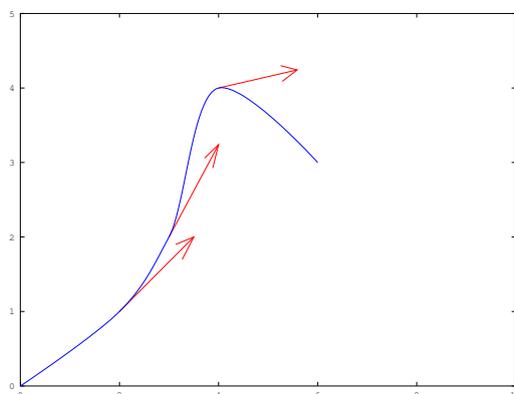


Figura 6.2: Interpolazione spline con tangenti di H. Akima

Una diversa soluzione al problema è stata proposta anche da A. Overhauser [Ove05], che sfruttando ancora le parabole q_i , definisce ogni tratto della spline come segue:

$$(6.1.18) \quad s_0(u) = q_0(u)$$

$$(6.1.19) \quad s_i(u) = \frac{u_{i+1} - u}{\Delta_i} q_i(u) + \frac{u - u_i}{\Delta_i} q_{i+1}(u) \quad \text{per } i = 1, \dots, L-2$$

$$(6.1.20) \quad s_{L-1}(u) = q_{L-1}(u).$$

Verifichiamo ora che effettivamente la soluzione di Overhauser interpola i dati. Prima di tutto verifichiamo che i punti di giunzione della spline sono i punti che vogliamo interpolare. Ovviamente, per come abbiamo definito le parabole q_i , vale: $s_0(u_0) = q_0(u_0) = B_0$ e $s_{L-1}(u_L) = q_{L-1}(u_L) = B_L$. Inoltre per tutti gli altri punti vale:

$$s_{i-1}(u_i) = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta_{i-1}} q_i(u_i) = q_i(u_i) = B_i$$

$$s_i(u_i) = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta_i} q_i(u_i) = q_i(u_i) = B_i.$$

Verifichiamo infine che ci sia un incollamento di tipo \mathcal{C}^1 , ovvero che valga:

$$\frac{d}{du} s_{i-1}(u_i) = \frac{d}{du} s_i(u_i);$$

calcoliamo la derivata del tratto s_i :

$$\frac{d}{du}s_i(u) = \frac{1}{\Delta_i} \left(-q_i(u) + (u_{i+1} - u) \frac{d}{du}q_i(u) + q_{i+1}(u) + (u - u_i) \frac{d}{du}q_{i+1}(u) \right)$$

quindi valgono:

$$\frac{d}{du}s_{i-1}(u_i) = \frac{1}{\Delta_{i-1}} \left(-q_{i-1}(u_i) + q_i(u_i) + \Delta_{i-1} \frac{d}{du}q_i(u_i) \right) = \frac{d}{du}q_i(u_i)$$

$$\frac{d}{du}s_i(u_i) = \frac{1}{\Delta_i} \left(-q_i(u_i) + \Delta_i \frac{d}{du}q_i(u_i) + q_{i+1}(u_i) \right) = \frac{d}{du}q_i(u_i).$$

6.2 Spline cubiche di tipo \mathcal{C}^2

Supponiamo ora di assegnare $L+1$ punti B_0, \dots, B_L e i rispettivi nodi u_0, \dots, u_L . Vogliamo cercare quindi una spline cubica di tipo \mathcal{C}^2 , sfruttando quanto visto nel paragrafo 5.3, e descriverla mediante i punti D_i . Riportiamo per comodità le relazioni che devono sussistere tra i punti da interpolare, i punti $P_{3i\pm i}$ e i punti di De Boor D_i per $i = -1, \dots, L+1$. Prima di tutto i punti da interpolare devono essere i punti di giunzione:

$$(6.2.1) \quad B_i = P_{3i} \quad \text{per } i = 0, \dots, L.$$

Tra i punti $P_{3i\pm 1}$ e i punti da interpolare B_i deve sussistere la seguente relazione:

$$(6.2.2) \quad B_i = \frac{\Delta_i P_{3i-1} + \Delta_{i-1} P_{3i+1}}{\Delta_{i-1} + \Delta_i} \quad \text{per } i = 1, \dots, L-1.$$

I punti $P_{3i\pm 1}$ sono in relazione con i punti D_i nel seguente modo:

$$(6.2.3) \quad P_{3i-1} = \frac{\Delta_i D_{i-1} + (\Delta_{i-2} + \Delta_{i-1}) D_i}{\Delta_{i-2} + \Delta_{i-1} + \Delta_i} \quad \text{per } i = 2, \dots, L-1$$

$$(6.2.4) \quad P_{3i+1} = \frac{(\Delta_i + \Delta_{i+1}) D_i + \Delta_{i-1} D_{i+1}}{\Delta_{i-1} + \Delta_i + \Delta_{i+1}} \quad \text{per } i = 1, \dots, L-2$$

per i punti P_2 e P_{3L-2} aggiungiamo le seguenti relazioni:

$$(6.2.5) \quad P_2 = \frac{\Delta_1 D_0 + \Delta_0 D_1}{\Delta_0 + \Delta_1}$$

$$(6.2.6) \quad P_{3L-2} = \frac{\Delta_{L-1}D_{L-2} + \Delta_{L-2}D_{L-1}}{\Delta_{L-2} + \Delta_{L-1}} .$$

Vogliamo descrivere la nostra spline solo tramite i punti D_i , quindi sfrutteremo queste relazioni per ottenere relazioni dirette tra i punti che vogliamo interpolare B_i e i punti D_i . Per $i = 2, \dots, L-2$ otteniamo:

$$\begin{aligned} B_i &= \frac{\Delta_i P_{3i-1} + \Delta_{i-1} P_{3i+1}}{\Delta_{i-1} + \Delta_i} \\ &= \frac{1}{\Delta_{i-1} + \Delta_i} \left[\Delta_i \left(\frac{\Delta_i D_{i-1} + (\Delta_{i-2} + \Delta_{i-1}) D_i}{\Delta_{i-2} + \Delta_{i-1} + \Delta_i} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \Delta_{i-1} \left(\frac{(\Delta_i + \Delta_{i+1}) D_i + \Delta_{i-1} D_{i+1}}{\Delta_{i-1} + \Delta_i + \Delta_{i+1}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\Delta_{i-1} + \Delta_i} \left[\frac{(\Delta_i)^2}{\Delta_{i-2} + \Delta_{i-1} + \Delta_i} D_{i-1} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\Delta_i(\Delta_{i-2} + \Delta_{i-1})}{\Delta_{i-2} + \Delta_{i-1} + \Delta_i} + \frac{\Delta_{i-1}(\Delta_i + \Delta_{i+1})}{\Delta_{i-1} + \Delta_i + \Delta_{i+1}} \right) D_i + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\Delta_{i-1})^2}{\Delta_{i-1} + \Delta_i + \Delta_{i+1}} D_{i+1} \right] \end{aligned}$$

e se definiamo per convenzione $\Delta_{-1} = \Delta_L = 0$ la relazione precedente vale anche per gli indici $i = 1, L$. In questo modo si riesce a tener conto anche dei punti particolari P_2 e P_{3L-2} . Alla fine per ogni $i = 1, \dots, L-1$ possiamo quindi riscrivere la relazione che stavamo cercando nella seguente maniera:

$$(6.2.7) \quad (\Delta_{i-1} + \Delta_i) B_i = \alpha_i D_{i-1} + \beta_i D_i + \gamma_i D_{i+1}$$

dove

$$(6.2.8) \quad \alpha_i = \frac{(\Delta_i)^2}{\Delta_{i-2} + \Delta_{i-1} + \Delta_i}$$

$$(6.2.9) \quad \beta_i = \frac{\Delta_i(\Delta_{i-2} + \Delta_{i-1})}{\Delta_{i-2} + \Delta_{i-1} + \Delta_i} + \frac{\Delta_{i-1}(\Delta_i + \Delta_{i+1})}{\Delta_{i-1} + \Delta_i + \Delta_{i+1}}$$

$$(6.2.10) \quad \gamma_i = \frac{(\Delta_{i-1})^2}{\Delta_{i-1} + \Delta_i + \Delta_{i+1}} .$$

Alle precedenti relazioni aggiungiamo $D_0 = P_1$ e $D_L = P_{3L-1}$ in modo che il problema si riduca alla risoluzione del seguente sistema lineare:

invece per $i = 1$:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{(\Delta_1)^2}{\Delta_{-1} + \Delta_0 + \Delta_1} \\ &= \frac{(\Delta)^2}{\Delta + \Delta} \\ &= \frac{1}{2}\Delta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{\Delta_1(\Delta_{-1} + \Delta_0)}{\Delta_{-1} + \Delta_0 + \Delta_1} + \frac{\Delta_0(\Delta_1 + \Delta_2)}{\Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2} \\ &= \frac{\Delta(\Delta)}{\Delta + \Delta} + \frac{\Delta(\Delta + \Delta)}{\Delta + \Delta + \Delta} \\ &= \frac{1}{2}\Delta + \frac{2}{3}\Delta \\ &= \frac{7}{6}\Delta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{(\Delta_0)^2}{\Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2} \\ &= \frac{(\Delta)^2}{\Delta + \Delta + \Delta} \\ &= \frac{1}{3}\Delta\end{aligned}$$

infine per $i = L - 1$ abbiamo:

$$\begin{aligned}\alpha_{L-1} &= \frac{(\Delta_{L-1})^2}{\Delta_{L-3} + \Delta_{L-2} + \Delta_{L-1}} \\ &= \frac{(\Delta)^2}{\Delta + \Delta + \Delta} \\ &= \frac{1}{3}\Delta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_{L-1} &= \frac{\Delta_{L-1}(\Delta_{L-3} + \Delta_{L-2})}{\Delta_{L-3} + \Delta_{L-2} + \Delta_{L-1}} + \frac{\Delta_{L-2}(\Delta_{L-1} + \Delta_L)}{\Delta_{L-2} + \Delta_{L-1} + \Delta_L} \\ &= \frac{\Delta(\Delta + \Delta)}{\Delta + \Delta + \Delta} + \frac{\Delta(\Delta)}{\Delta + \Delta} \\ &= \frac{2}{3}\Delta + \frac{1}{2}\Delta \\ &= \frac{7}{6}\Delta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_0 = B_L &= \frac{\Delta_0 P_{3L-1} + \Delta_{-1} P_1}{\Delta_{-1} + \Delta_0} \\
&= \frac{1}{\Delta_{-1} + \Delta_0} \left[\Delta_0 \left(\frac{\Delta_0 D_{L-1} + (\Delta_{-2} + \Delta_{-1}) D_0}{\Delta_{-2} + \Delta_{-1} + \Delta_0} \right) \right. \\
&\quad \left. + \Delta_{-1} \left(\frac{(\Delta_0 + \Delta_1) D_0 + \Delta_{-1} D_1}{\Delta_{-1} + \Delta_0 + \Delta_1} \right) \right] \\
&= \frac{1}{\Delta_{-1} + \Delta_0} \left[\frac{(\Delta_0)^2}{\Delta_{-2} + \Delta_{-1} + \Delta_0} D_{L-1} + \left(\frac{\Delta_0(\Delta_{-2} + \Delta_{-1})}{\Delta_{-2} + \Delta_{-1} + \Delta_0} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\Delta_{-1}(\Delta_0 + \Delta_1)}{\Delta_1 + \Delta_0 + \Delta_1} \right) D_0 + \frac{(\Delta_{-1})^2}{\Delta_1 + \Delta_0 + \Delta_1} D_1 \right].
\end{aligned}$$

Quindi il sistema lineare che dobbiamo risolvere prende la seguente particolare forma:

$$(6.2.17) \quad \begin{bmatrix} \beta_0 & \gamma_0 & & & & & & \alpha_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & & & & & \\ & & & \dots & & & & \\ & & & & \alpha_{L-2} & \beta_{L-2} & \gamma_{L-2} & \\ \gamma_{L-1} & & & & \alpha_{L-1} & \beta_{L-1} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_0 \\ D_1 \\ \dots \\ D_{L-2} \\ D_{L-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ \dots \\ R_{L-2} \\ R_{L-1} \end{bmatrix}$$

dove

$$(6.2.18) \quad R_i = (\Delta_{i-1} + \Delta_i) B_i \quad \text{per } i = 0, \dots, L-1$$

e α_i , β_i e γ_i per $i = 0, \dots, L-1$ sono sempre definite dalle (6.2.8), (6.2.9) e (6.2.10) per ogni $i = 0, \dots, L-1$.

6.2.1 Le spline cubiche di tipo \mathcal{C}^2 e l'interpolazione di Hermite

In questo paragrafo cerchiamo le condizioni che permettono di costruire una interpolante di Hermite, come visto in 6.1.1, che sia di classe \mathcal{C}^2 . Supponiamo assegnati i punti B_0, \dots, B_L e i nodi u_0, \dots, u_L . Ogni tratto della spline è del tipo:

$$(6.2.19) \quad s_i(u) = B_i H_0^3(r) + \vec{m}_i \Delta_i H_1^3(r) + \vec{m}_{i+1} \Delta_i H_2^3(r) + B_{i+1} H_3^3(r)$$

dove gli H_j^3 sono i polinomi cubici di Hermite definiti nella (4.1.7) e $r = \frac{u-u_i}{\Delta_i}$, i punti B_j sono quelli assegnati, mentre i vettori \vec{m}_j sono incogniti

e dobbiamo sceglierli in modo che la spline risulti di classe C^2 . Per ogni $i = 1, \dots, L - 1$ deve valere:

$$(6.2.20) \quad \frac{d^2}{du^2} s_{i-1}(u_i) = \frac{d^2}{du^2} s_i(u_i).$$

Incominciamo quindi a calcolare la derivata seconda del generico tratto s_i rispetto a u :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{du^2} s_i(u) &= \frac{d^2}{dr^2} s_i(r) \left(\frac{dr}{du} \right)^2 \\ &= \frac{1}{(\Delta_i)^2} \frac{d^2}{dr^2} s_i(r) \\ &= \frac{1}{(\Delta_i)^2} \left(B_i \frac{d^2}{dr^2} H_0^3(r) + \vec{m}_i \Delta_i \frac{d^2}{dr^2} H_1^3(r) + \vec{m}_{i+1} \Delta_i \frac{d^2}{dr^2} H_2^3(r) + \right. \\ &\quad \left. + B_{i+1} \frac{d^2}{dr^2} H_3^3(r) \right). \end{aligned}$$

Calcoliamo quindi le derivate seconde dei polinomi cubici di Hermite, sfruttando i conti già fatti per le derivate prime nel paragrafo 4.1:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} H_0^3(r) &= \frac{d^2}{dr^2} (B_0^3(r) + B_1^3(r)) \\ &= \frac{d}{dr} (-6r(1-r)) \\ &= -6 + 12r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} H_1^3(r) &= \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{3} B_1^3(r) \right) \\ &= \frac{d}{dr} ((1-r)^2 - 2r(1-r)) \\ &= -2(1-r) - 2 + 4r \\ &= -4 + 6r \end{aligned}$$

$$(6.2.26) \quad \begin{aligned} \vec{r}'_0 &= \vec{m}_0 \\ \vec{r}'_i &= 3(B_{i+1} - B_{i-1}) \quad \text{per } i = 1, \dots, L-1 \\ \vec{r}'_L &= \vec{m}_L. \end{aligned}$$

Un'altra scelta possibile per il primo e per l'ultimo vettore, detta *Bessel end condition*, è quella di scegliere come vettori \vec{m}_0 e \vec{m}_L i vettori tangenti alle parabole di Bézier q_1 e q_{L-1} come fatto nelle (6.1.10) e (6.1.11). Quindi per quanto già visto nel paragrafo 6.1.2 otteniamo:

$$\begin{aligned} \vec{r}'_0 &= -\frac{2\Delta_0 + \Delta_1}{\Delta_0(\Delta_0 + \Delta_1)}B_0 + \frac{\Delta_0 + \Delta_1}{\Delta_0\Delta_1}B_1 - \frac{\Delta_0}{\Delta_1(\Delta_0 + \Delta_1)}B_2 \\ &= -\frac{2(2\Delta_0 + \Delta_1)}{\Delta_0\beta_1}B_0 + \frac{\beta_1}{2\Delta_0\Delta_1}B_1 - \frac{2\Delta_0}{\Delta_1\beta_1}B_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}'_L &= \frac{\Delta_{L-1}}{\Delta_{L-2}(\Delta_{L-2} + \Delta_{L-1})}B_{L-2} - \frac{\Delta_{L-2} + \Delta_{L-1}}{\Delta_{L-2}\Delta_{L-1}}B_{L-1} + \\ &+ \frac{2\Delta_{L-1} + \Delta_{L-2}}{\Delta_{L-1}(\Delta_{L-2} + \Delta_{L-1})}B_L \\ &= \frac{2\Delta_{L-1}}{\Delta_{L-2}\beta_{L-1}}B_{L-2} - \frac{\beta_{L-1}}{2\Delta_{L-2}\Delta_{L-1}}B_{L-1} + \frac{2(2\Delta_{L-1} + \Delta_{L-2})}{\Delta_{L-1}\beta_{L-1}}B_L. \end{aligned}$$

Un'altra possibile scelta è detta *quadratic end condition*. In tal caso si pone:

$$\frac{d^2}{du^2}s_0(u_0) = \frac{d^2}{du^2}s_0(u_1) \quad \text{e} \quad \frac{d^2}{du^2}s_{L-1}(u_{L-1}) = \frac{d^2}{du^2}s_{L-1}(u_L)$$

quindi per quanto detto nella sezione precedente 6.2.1 otteniamo che la prima delle due implica:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\Delta_0)^2}(-6B_0 - 4\Delta_0\vec{m}_0 - 2\Delta_0\vec{m}_1 + 6B_1) &= \frac{1}{(\Delta_0)^2}(6B_0 + 2\Delta_0\vec{m}_0 + 4\Delta_0\vec{m}_1 - 6B_1) \\ \Rightarrow 6\Delta_0\vec{m}_0 + 6\Delta_0\vec{m}_1 &= -12B_0 + 12B_1 \end{aligned}$$

quindi

$$(6.2.27) \quad \vec{m}_0 + \vec{m}_1 = \frac{2}{\Delta_0}\Delta B_0$$

ed analogamente la seconda implica:

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{dr^3}H_1^3(r) &= \frac{d^3}{dr^3}\left(\frac{1}{3}B_1^3(r)\right) \\ &= \frac{d}{dr}(-4 + 6r) \\ &= 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{dr^3}H_2^3(r) &= \frac{d^3}{dr^3}\left(-\frac{1}{3}B_2^3(r)\right) \\ &= \frac{d}{dr}(-2 + 6r) \\ &= 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{dr^3}H_3^3(r) &= \frac{d^3}{dr^3}(B_2^3(r) + B_3^3(r)) \\ &= \frac{d}{dr}(6 - 12r) \\ &= -12\end{aligned}$$

quindi la derivata terza prende la forma:

$$(6.2.31) \quad \frac{d^3}{du^3}s_i(u) = \frac{1}{(\Delta_i)^3}(12B_i + 6\Delta_i\vec{m}_i + 6\Delta_i\vec{m}_{i+1} - 12B_{i+1}).$$

Ora noi vogliamo che valga:

$$(6.2.32) \quad \begin{aligned}\frac{d^3}{du^3}s_0(u_1) &= \frac{d^3}{du^3}s_1(u_1) \\ \Rightarrow \frac{1}{(\Delta_0)^3}(12B_0 + 6\Delta_0\vec{m}_0 + 6\Delta_0\vec{m}_1 - 12B_1) &= \frac{1}{(\Delta_1)^3}(12B_1 + 6\Delta_1\vec{m}_1 + \\ &\quad + 6\Delta_1\vec{m}_2 - 12B_2)\end{aligned}$$

$$(6.2.33) \quad \Rightarrow \frac{6}{(\Delta_0)^2}\vec{m}_0 + \left(\frac{6}{(\Delta_0)^2} - \frac{6}{(\Delta_1)^2}\right)\vec{m}_1 - \frac{6}{(\Delta_1)^2}\vec{m}_2 = \frac{12}{(\Delta_0)^3}\Delta B_0 - \frac{12}{(\Delta_1)^3}\Delta B_1.$$

Infine citiamo una scelta che è detta *naturale*. Questa richiede che le derivate seconde nei nodi u_0 e u_L siano nulle. Vediamo quindi cosa implica l'annullamento della derivata seconda della spline in u_0 (per u_L sarà analogo). Per quanto visto prima vale:

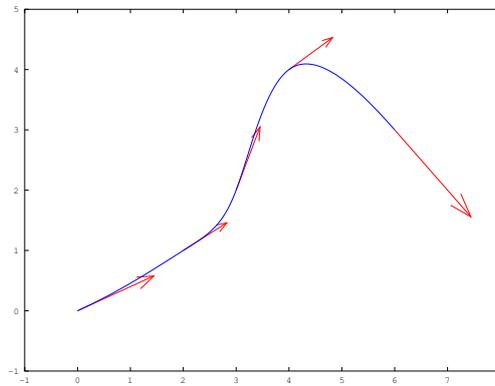


Figura 6.4: Bessel end condition

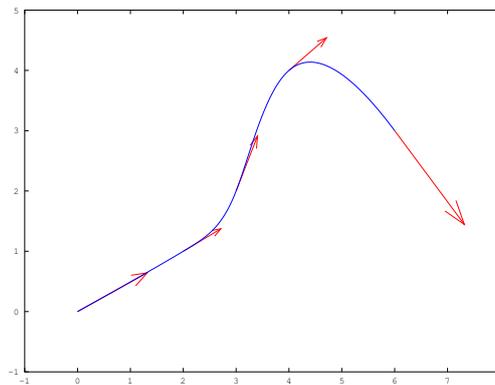


Figura 6.5: Quadratic end condition

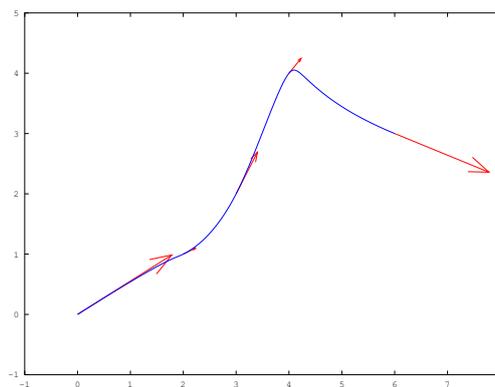


Figura 6.6: Not-a-knot end condition

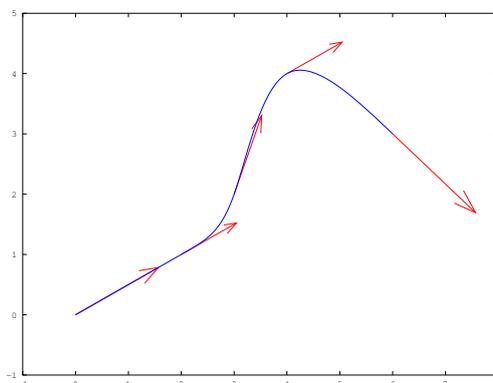


Figura 6.7: Naturale

6.2.3 Vari tipi di scelte dei nodi

Fino ad ora abbiamo analizzato problemi di interpolazione in cui i nodi u_i erano assegnati, ma può capitare un problema in cui vengono assegnati solamente i punti da interpolare B_i . Esiste sempre una spline interpolante, perché i punti di De Boor definiscono univocamente il supporto della curva, anzi ne esistono molte e possiamo decidere quali nodi scegliere, a seconda delle necessità, per esempio che la spline sia di tipo C^r con r fissato. Per concludere questo capitolo vogliamo presentare alcuni tipi di scelte di nodi che si possono utilizzare. Il più diffuso è quello detto *uniforme* dove $u_i = i$ per ogni $i = 0, \dots, L$. Il problema più grosso di questo tipo di scelta è che non tiene in considerazione la distribuzione dei punti dati. Infatti il punto $s(u)$ si sposta sul supporto dal punto $s(u_i)$ a $s(u_{i+1})$ e da $s(u_{i+1})$ a $s(u_{i+2})$ nello stesso tempo, indipendentemente dalla distanza dei punti. Per questo motivo si prediligono scelte che dipendano dalla configurazione dei punti da interpolare.

Diamo ora tre esempi. La prima è detta *chord length parametrization*. In tal caso i nodi sono scelti in modo tale che:

$$(6.2.38) \quad \frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}} = \frac{\|\Delta B_i\|}{\|\Delta B_{i+1}\|}.$$

Osserviamo subito che, in realtà, la (6.2.38) non definisce una unica sequenza di nodi, ma una famiglia di sequenze di nodi legate l'una alle altre mediante trasformazioni affini tipo $v = \alpha + \beta u$. Le scelte più frequenti sono quelle di scegliere $u_0 = 0$ e $u_L = 1$ oppure $u_0 = 0$ e $u_L = L$.

Un'altra possibile parametrizzazione è stata definita da E. Lee [Lee89] ed è detta *centripeta*, in tal caso i nodi sono scelti in modo tale che:

$$(6.2.39) \quad \frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}} = \left(\frac{\|\Delta B_i\|}{\|\Delta B_{i+1}\|} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Infine anche T. Foley [NF89] ha proposto una possibile scelta nel seguente modo:

$$(6.2.40) \quad \Delta_i = d_i \left(1 + \frac{3\hat{\Theta}_i d_{i-1}}{2(d_{i-1} + d_i)} + \frac{3\hat{\Theta}_{i+1} d_{i+1}}{2(d_i + d_{i+1})} \right)$$

dove

$$(6.2.41) \quad d_i = \|\Delta B_i\| \quad \hat{\Theta}_i = \min \left(\pi - \Theta_i, \frac{\pi}{2} \right)$$

e Θ_i è l'angolo formato da B_{i-1} , B_i e B_{i+1} .

Non esiste in realtà una scelta ottimale per i nodi valida in ogni situazione, la scelta migliore dipende dal singolo problema che si sta affrontando. Osserviamo che ciò che distingue maggiormente la prima scelta dalle altre tre è che la prima è invariante per trasformazioni affini dei punti dati, invece le altre tre no, perchè entra in gioco la distanza dei punti, che non è invariante per trasformazioni affini.

Bibliografia

- [Aki70] Hiroshi Akima, *A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures*, J. ACM **17** (1970), no. 4, 589–602.
- [Far97] Gerald Farin, *Curves and surfaces for computer-aided geometric design*, fourth ed., Computer Science and Scientific Computing, Academic Press Inc., San Diego, CA, 1997, A practical guide, Chapter 1 by P. Bézier; Chapters 11 and 22 by W. Boehm, With 1 IBM-PC floppy disk (3.5 inch; HD). MR 1412572 (97e:65022)
- [Lee89] E.T.Y. Lee, *Choosing nodes in parametric curve interpolation*, Computer-Aided Design **21** (1989), no. 6, 363 – 370.
- [NF89] Gregory M. Nielson and Thomas A. Foley, *Mathematical methods in computer aided geometric design*, Academic Press Professional, Inc., San Diego, CA, USA, 1989, pp. 445–467.
- [Ove05] A. W. Overhauser, *Analytic definition of curves and surfaces by parabolic blending*, CoRR **abs/cs/0503054** (2005).
- [Ris91] J.J. Risler, *Méthodes mathématiques pour la cao*, Recherches en mathématiques appliquées, Masson, 1991.

Ringraziamenti

Prima di tutto vorrei ringraziare il professor Alberto Alzati, relatore di questo elaborato, per l'attenzione e la disponibilità nel seguirmi nella stesura.

Dei doverosi ringraziamenti vanno ai miei genitori, per tutti gli sforzi che hanno fatto per permettermi di affrontare questa carriera universitaria, e per il loro sempre immancabile sostegno.

Ringrazio mia sorella Elisa per essere la mia forza e essermi sempre accanto, e con lei Gon, per avermi regalato il computer per poter scrivere questo elaborato. Siete speciali.

La mia famiglia, anche se un oceano ci divide, non mi hanno mai fatto mancare affetto e amore.

Un ringraziamento particolare va alle mie zie Giulia, Pina e Sandra, per esserci sempre, nei momenti belli e brutti.

A Giovanni, Michael e Lucchi, i miei compagni di infanzia, amici speciali, che ritrovo sempre, perchè certi legami sono inscindibili.

A Lara, la migliore compagna di viaggio che potevo avere in questi anni, una vera Amica.

Ai miei compagni di università: se avessi potuto sceglierli non avrei potuto fare di meglio. Grazie per tutte le giornate e serate passate assieme, saranno dei ricordi indelebili. Un ringraziamento particolare va a Ico, per l'immenso aiuto che mi ha dato nella creazione delle immagini all'interno dell'elaborato, senza di lui non ci sarei mai riuscita.

Al Santo Bevitore, per avermi fatto sempre sentire a casa. Il lavoro migliore che potevo fare soprattutto grazie ad Ale, che non è un semplice boss, ma è un amico, una spalla che mi sorregge nei momenti peggiori.

Infine Tommaso, ogni parola di ringraziamento per lui sarebbe troppo poco.